

# APLICAÇÕES DA TEORIA DOS FRACTAIS EM GEOCIÊNCIAS

*José Leonardo Silva Andriotti(1)*

## ABSTRACT

It is now recognized that a variety of natural processes exhibit scale invariant behavior over a wide range of scales. Scale invariant processes often exhibit a fractal behavior.

"A fractal is defined as a set for which the Hausdorff-Besicovitch dimension strictly exceeds the topological dimension (Mandelbrot, 1977)".

Fractals are shapes that look basically the same on all scales - they have self-similarity.

Numerous geological processes appear similar at all scales of magnitude (scale-independent phenomena), and fractal geometry has contributed significantly to their analysis.

## RESUMO

É reconhecido, atualmente, que muitos processos naturais apresentam comportamentos que não variam com as escalas de observação em uma ampla faixa de escalas; tais processos exibem, com frequência, comportamento chamado fractal.

Um fractal é definido como um conjunto para o qual a dimensão de Hausdorff-Besicovitch excede a dimensão topológica, segundo Mandelbrot (1977).

Fractais são formas que parecem basicamente as mesmas em todas as escalas - diz-se terem auto-similaridade.

Vários processos geológicos parecem similares em todas as escalas de observação, e a geometria fractal tem contribuído significativamente na análise dos mesmos.

## INTRODUÇÃO

A teoria dos fractais tem sido largamente aplicada nos mais variados campos do conhecimento humano nos últimos anos, entre eles as Ciências da Terra. Os primeiros e mais conhecidos trabalhos utilizando esta abordagem são, justamente, sobre linhas de costa, seu tamanho e sua dimensão (no caso, dimensão fractal ou  $D$ ).

(1) Companhia de Pesquisa de Recursos Minerais  
Rua Banco da Província, 105 – Porto Alegre/RS  
CEP 90840-030  
Universidade do Vale do Rio dos Sinos  
Av. Unisinos 950 – São Leopoldo/RS  
CEP 93022-000

Os conceitos básicos desta teoria não fazem parte dos objetivos do presente trabalho: aqui estão relatadas e comentadas apenas algumas das aplicações práticas dos mesmos em Geociências.

Para um contato com o histórico e com os conceitos de base desta teoria recomendamos consulta às obras de Mandelbrot (1967,1975,1977,1982), Feder (1988), Falconer (1990), Gleick (1987) e Chaves (1989), dentre muitos outros.

Uma das primeiras barreiras a transpor para a compreensão da teoria dos fractais é o entendimento e aceitação do que se chama dimensão de Hausdorff-Besicovitch (**H-B**), que excede a dimensão topológica euclidiana e que, ao contrário dela, pode assumir valores não inteiros. A aceitação e/ou compreensão de uma medida topológica de, digamos,  $2,1$ , é fundamental para se avançar no tema.

Outro conceito fundamental é o de auto-similaridade (self-similarity); as características de um dado fenômeno ou processo se repetiriam, segundo este conceito, nas diferentes escalas de observação, respeitadas determinadas condições; este grau de "auto-repetição" seria indicado pela auto-similaridade.

Uma das críticas que sofre esta teoria é a de que os trabalhos executados sempre recolhem como conclusão um número, o da dimensão fractal, e que a natureza (ou os processos que nela atuam) não é tão simples a ponto de poder ser desvendada por um número isolado. É evidente que o número isolado não é uma solução; a sua correta interpretação e o estabelecimento de uma relação entre este valor e o processo estudado é que pode trazer alguma luz sobre o comportamento das forças atuantes no fenômeno sob estudo.

Muitos pesquisadores têm utilizado os conceitos de Geostatística no apoio à estimativa do valor da dimensão fractal, com resultados considerados satisfatórios pelos autores.

Uma forma simples de se entender o conceito de dimensão fractal, para quem trabalha no domínio das Geociências, seria, resumidamente, a execução e observação dos resultados obtidos nas operações seguintes:

- 1) em um mapa topográfico (escala 1:25.000, por exemplo) selecionar um rio de, digamos, dez quilômetros de extensão; chame-se  $L$  o comprimento deste rio;
- 2) escolher um padrão de medida de, digamos, quinhentos metros, e chame-se-o  $1$ ;
- 3) percorrer o traçado do rio com este medidor  $1$ , e anotar o número de vezes ( $N$ ) em que se o utilizou para fazer todo o percurso;
- 4)  $N$  será uma estimativa de  $L$ , que é o tamanho real do rio marcado sobre o mapa;
- 5) reduzir o valor de  $1$  à metade, e repetir a operação 3), e continuar a fazê-lo sucessivamente enquanto for possível reduzir  $1$ ;
- 6) plotar, usando escalas aritméticas,  $1$  no eixo das abcissas e  $L$  no eixo das ordenadas; a relação não será exatamente linear, mas apenas aproximadamente;

7) plotar  $\log 1$  no eixo das abcissas e  $\log L$  no eixo das ordenadas; haverá uma maior aproximação com relação à linearidade.

Verifica-se que a inclinação deste último gráfico apresenta alguma relação com a sinuosidade do rio; é possível observar que quanto mais reduzimos  $1$  mais aumentamos a precisão da medida e verificamos, por fim, que o grau de sinuosidade envolvido em cada etapa parece se repetir (auto-similaridade).

Um rio que fosse completamente reto teria, como se sabe da geometria euclidiana, dimensão igual a um; se seus meandros tiverem sua freqüência aumentada de tal forma a tenderem a ocupar todo o plano no qual o rio estiver contido, sua dimensão tenderá a dois.

A dimensão fractal pode ser estimada a partir da inclinação da linha obtida no gráfico  $\log 1$  x  $\log L$ .

Mandelbrot (1977,1982) utilizou o termo fractal para se referir a objetos cujas irregularidades parecem ser as mesmas independentemente do nível de detalhe que utilizarmos para estudá-las, parecendo não haver limites para a sua irregularidade.

As várias direções que um rio assume na totalidade do seu curso são função da natureza geológica dos terrenos atravessados, da tectônica e das condições de relevo (relacionadas aos dois primeiros fatores). A dimensão fractal pode ser utilizada como um parâmetro relacionado aos processos físico-químicos responsáveis por estas irregularidades.

Às vezes se obtêm relações nítidas entre os valores da dimensão fractal dos cursos d'água e a natureza das rochas subjacentes e isso se torna parcialmente importante em áreas que se caracterizam por apresentar espessos mantos de intemperismo e escassez de afloramentos.

Relatamos, na seqüência, os resultados obtidos em várias aplicações da teoria dos fractais em Geociências; estas aplicações ainda são em pequena quantidade, mas com nítido crescimento nos últimos anos, daí julgarmos apropriado apresentar, no presente trabalho, uma idéia do atual estado da utilização dos fractais em Geociências.

## SEDIMENTOLOGIA

A forma das partículas de sedimentos, cujas componentes são, nas medidas sedimentológicas tradicionais, a forma propriamente dita, a esfericidade, a angularidade, o arredondamento, a textura superficial, tem sido fonte de dificuldades para sedimentólogos quando o objetivo é sua quantificação através de índices específicos que possam auxiliar na caracterização dos sedimentos. Devido à dificuldade de se encontrar na natureza partículas detríticas de comportamento regular no que tange a sua comparação com sólidos geométricos tomados como referência (no que diz respeito à forma),

percebe-se claramente a importância que adquirem índices que permitam uma classificação e, em conseqüência, comparações posteriores.

A própria existência de vários índices relacionados à forma das partículas, relatados por Orford (1981), enfatiza a dificuldade que há em expressar a forma das partículas de sedimentos em escalas lineares. Índices baseados nas dimensões dos eixos em duas ou três dimensões não podem levar em conta, por exemplo, reentrâncias no sedimento que podem torná-lo bem diferente do sólido de referência adotado para a classificação.

Os sedimentólogos concluíram que os resultados de estudos feitos sobre a forma dos grãos detríticos como apoio a outros estudos só poderia ser mais eficaz se os grãos que eram usualmente classificados apenas como "irregulares" ou "muito irregulares" no que diz respeito a sua forma pudessem ter essas irregularidades quantificadas em um sistema de classificação que pudesse ser considerado como robusto.

A utilização dos conceitos de dimensão fractal mostrou-se, com respeito a este fim, tão mais apropriada quão maiores fossem as irregularidades de forma das partículas. Todos os valores da população fractal sofrem, de uma maneira geral, um crescimento com o aumento da irregularidade das partículas estudadas.

Lembrando que se chamarmos de  $P$  o perímetro fixo, irregular, de uma superfície e de  $S$  o número de passos, ou unidades de medida que precisamos empregar para que todo o trajeto  $P$  seja percorrido, veremos que à medida que  $S$  diminui, maior é a distância aparente do perímetro; ao se plotar os logaritmos de  $P$  e  $S$  num gráfico do tipo  $XY$  convencional ver-se-á uma relação linear, sendo a inclinação notada por  $b$ . O valor da dimensão fractal sendo representado por  $D$ , tem-se como relação válida, no estudo dos fractais,

$$\log P \propto (D-1) \log S$$

ou

$$P \propto S^{(D-1)}$$

Há que se ressaltar, entretanto, a possibilidade de a relação  $\log P \times \log S$  tomar outra forma que não a linear, quando então tratamento matemático adequado pode reencontrar a relação linear (utilização de ponderação por mínimos quadrados, derivação, etc..).

Três tipos básicos de assembléias fractais são definidas de acordo com o comportamento dos gráficos  $\log P \times \log S$ , tipos esses exemplificados na figura 1. O tipo I é associado mais comumente a

formas relativamente regulares, assim consideradas aquelas cujas características globais dominariam sobre as chamadas rugosidades de bordo, que seriam de pouca ou nenhuma importância no exame do todo. O tipo II seria intermediário entre os tipos I e III, este último caracterizando uma marcante irregularidade dos bordos quando do exame do todo. Na figura 1 se colocou, ao lado dos gráficos representando estes três tipos de comportamento, possíveis formas de partículas de sedimentos a que poderiam se associar os resultados dos gráficos.

A utilização dos conceitos da teoria dos fractais no estudo das formas dos grãos de sedimentos exige um estudo de calibração, ou relacionamento, entre as modificações morfológicas dos grãos e as mudanças correspondentes nos valores da dimensão fractal.

Resultados de estudos morfológicos em radiolários foram complementados pela aplicação de Análise de Clusters aos resultados visando à possível identificação de morfo-fácies; os atributos utilizados na Análise de Clusters foram os três valores de **dimensão simples, fractal textural e fractal estrutural**. Os resultados foram considerados satisfatórios no apoio à identificação de populações, o que reforça a utilidade da utilização da teoria fractal na análise da forma que caracteriza populações em conjuntos heterogêneos de partículas que se caracterizam por apresentar irregularidades de forma.

## DEFORMAÇÃO CRUSTAL

É considerado, em Geologia, que os deslocamentos de uma zona de falha principal se distribuem por toda uma região vizinha a esta zona principal, daí ter-se lançado mão do conceito de fractal com o fito de melhor entender esta distribuição.

Resultados apresentados por Turcotte (1986), estudando a falha de San Andreas, nos Estados Unidos, dão conta de que somente uma fração da velocidade relativa da placa é acomodada na falha San Andreas, sendo o restante da velocidade relativa entre placas acomodadas nas regiões adjacentes, nas quais há muitos falhamentos secundários (a velocidade relativa entre as duas placas- Pacífica e Norte Americana- é tida como sendo da ordem de 5,5 centímetros por ano). Foi elaborado um modelo segundo o qual a zona adjacente à falha San Andreas é formada por uma distribuição fractal de falhas em todas as escalas. A velocidade relativa obtida pelo emprego da teoria fractal foi de 2,93 centímetros por ano para o falhamento principal (San Andreas), ficando a porção remanescente do deslocamento relativo distribuído entre os falhamentos de outras ordens situados nas proximidades. Este resultado pode ser considerado como razoavelmente próximo dos obtidos a partir de outros estudos geológicos (sem uso da teoria fractal), e que é de 3,39+-0,29 centímetros por ano. O comportamento do sistema é controlado, no caso, pela dimensão fractal (**D**), que dá a porção do

deslocamento total que se processa sobre o falhamento principal; assim, se se obtiver  $d = 2$  significa que cinquenta por cento da velocidade total está concentrada no falhamento principal (o valor obtido para  $D$  foi de 1,9 nesse caso).

O aumento do valor de  $D$  significa um aumento do deslocamento que ocorre nos falhamentos menores em relação aos maiores, e os valores de  $D$  podem ser obtidos a partir das relações frequência x magnitude dos terremotos que ocorrem na região.

### REDES DE FRATURAS

Chilès (1988), estudando fraturas na mina de urânio de Fanay-Angères (França), encaixada em um maciço granítico, aplicou os conceitos de fractais.

Cada fratura com um traço maior que vinte centímetros foi registrada, anotando-se as coordenadas dos pontos terminais, o comprimento do traço e a orientação do plano da fratura (e outros não considerados no estudo, pois que a ênfase foi sobre a geometria da rede de fraturas).

Dividido o domínio do estudo em quadrados de lado igual a  $r$ , percebeu-se que o gráfico entre os logaritmos de  $r$  e de  $N$  (número de elementos presentes na área delimitada) apresentava comportamento grosseiramente linear e se prestava à abordagem fractal. O estudo foi feito e considerados os resultados como operacionais no plano (dimensão euclidiana dois), havendo problemas para sua implementação em três dimensões. Nos modelos com auto-similaridade as características se repetem, quer estejamos no todo ou em partes cada vez menores; na prática, entretanto, há que se considerar dois valores de corte, um interno e outro externo, que são as dimensões mínima e máxima das feições que fazem parte do conjunto de dados; entre estes valores é aplicável e tem significado o conceito de auto-similaridade.

### TONELAGEM X TEOR

A distribuição de frequências de massas para casos de fragmentação é

$$N \sim M^{(-D/3)}$$

para uma massa maior que  $M$ , e onde  $N$  é o número de fragmentos e  $M$  é a massa;  $D$  é a dimensão fractal e o valor  $1/3$  é incluído porque a massa é proporcional ao cubo do comprimento.

Um grande valor de  $D$  implica predominância de pequenos fragmentos, o que ocorre em material frágil, ou em situações de grande aporte de energia.

Se  $M$  é a tonelagem de minério com teor maior do que  $C$  (teor de corte adotado, arbitrário), a distribuição será fractal se

$$C \sim M^{(-D/3)}$$

Se o logaritmo do teor for função linear do logaritmo da tonelagem, então a dimensão fractal poderá ser obtida a partir da inclinação da reta ajustada.

Aplica-se a abordagem de grupo de renormalização, que consiste no seguinte:

1) considerar um cubo (ordem zero) de material com lado  $h$ ; ele é dividido em oito outros cubos de lado igual a  $h/2$ , cada um dos quais é novamente sub-dividido em oito cubos de lado igual a  $h/4$ , e assim sucessivamente;

2) fazemos a hipótese de que uma fração de abundância de um mineral em uma célula está concentrada em um elemento; assim, se a concentração média na célula de ordem zero for  $C_0$ , e o elemento de ordem zero for  $C_1$ , define-se

$$\phi_8 = C_1/C_0$$

como sendo este valor da fração.

Sabe-se que

$$V_1/V_0 = 1/8$$

e a concentração dos outros sete elementos é dada por

$$C_{01}/C_0 = (8/7) - (\phi_8/7)$$

e o valor máximo de  $\phi_8$  será oito.

Generalizando essas relações para a ordem  $n$  se tem

$$C_n = (\phi_8)^n \cdot C_0$$

e

$$V_n = [1/(8^n)] \cdot V_0$$

Tomando os logaritmos naturais se tem

$$\ln(C_n/C_0) = n \cdot \ln(\phi_8)$$

e

$$\ln(V_n/V_0) = -n \cdot \ln(8)$$

tem-se que

$$\ln(C_n/C_0) = -[(\ln \phi_8) / (\ln(8))] \cdot \ln(V_n/V_0)$$

donde

$$C_n/C_0 = (V_n/V_0)^{- (\ln \phi_8 / \ln(8))}$$

Usando a relação

$$C \sim M^{- (D/3)}$$

se tem que

$$C/C_0 = (M_0/M)^{D/3}$$

e

$$D = 3 [ (\ln \phi_8) / (\ln(8))] ]$$



que é a relação básica entre tonelagem e teor,  $M$  sendo uma tonelagem existente acima de um teor de corte  $C$ .

Assim, utilizando esse tipo de abordagem os altos valores de  $D$  (dimensão fractal) são representativos de uma forte concentração volumétrica (= teor) do elemento.

Dimensões fractais foram determinadas, nos Estados Unidos, para mercúrio (2,01), cobre (1,16) e urânio (1,48). Este tipo de tratamento não poderia ser adotado no caso se não houvesse repetição dos mecanismos de concentração nas diferentes escalas de estudo, e este método foi tido como adaptado à estimativa de reservas minerais para minérios de baixo teor.

### PROSPECÇÃO GEOQUÍMICA

O exame de mapas e dados geoquímicos levam a crer que os padrões de dispersão geoquímica, ou paisagens geoquímicas, poderiam apresentar comportamento fractal.

Bölviken e colaboradores (1992) sugerem que tal pode ocorrer "uma vez que os processos que causam tais padrões ocorreram através da história geológica da Terra em quaisquer velocidades e em escalas que variam desde a microscópica até a do tamanho dos continentes".

Os autores acima citados fizeram uma aplicação dos conceitos da teoria dos fractais aos dados de uma campanha na qual foram coletadas cinco mil setecentas e setenta e três amostras de sedimento de corrente, todas as amostras analisadas para vinte e um elementos (**Ag, Al, Ba, Ca, Ce, Co, Cr, Cu, Fe, La, Li, Mg, Mn, Mo, Ni, P, Sc, Sr, V, Zn, e Zr**). Quatro métodos foram aplicados visando à determinação da dimensão fractal: variografia, comprimento do contorno versus tamanho da unidade de medida, relação área-perímetro e relação área-número.

O método considerado mais adaptado foi o primeiro, que foi posteriormente complementado com a execução de Krigagem de células quadradas de um quilômetro de lado.

Quando da utilização dos variogramas, particularmente se eles forem ajustados a métodos teóricos portadores de patamar, fica prejudicada a idéia de aumento ilimitado da variância com o passo dos variogramas (valor de  $h$ , distância entre amostras), mas os autores argumentam que essa contradição é irreal por duas razões, uma delas a de que os fenômenos fractais naturais teriam limites inferiores e superiores entre os quais seria válida a idéia de auto-similaridade (ou auto-afinidade); o limite inferior, neste caso, seria o intervalo mínimo de amostragem disponível, e o limite superior seria a dimensão total da área.

A outra razão dada pelos autores seria a de que "o variograma "ideal" pressupõe distribuição dos dados normal ou próxima da normalidade"; admitem, entretanto, que a dimensão fractal ( $D$ ) tenda

a ser super-estimada quando se calcula variogramas experimentais com dados brutos mesmo que a distribuição dos mesmos seja lognormal.

O uso da relação área-perímetro se baseia, de fato, na relação dessas medidas referentes às curvas de isotores. Com relação a essas curvas, os autores nada dizem com respeito a sua construção; o alerta é válido por saber-se que, especialmente em se tratando de resultados de sedimento de corrente, a simples interpolação aritmética dos valores obtidos nas análises, que são geralmente assinalados sobre um ponto nos mapas, não está a salvo de críticas de vários autores.

A relação área-número relaciona as áreas acima de um determinado valor com o número de unidades (células) que se enquadram no grupo de área superior ao valor de corte determinado previamente.

Entre as especulações sobre a utilidade destes conceitos em Prospecção Geoquímica estaria a possibilidade de permitir um maior espaçamento da malha de amostragem em relação aos padrões usualmente adotados visando à determinação de províncias geoquímicas, sub-províncias e, assim sucessivamente, até os depósitos minerais. Também poder-se-ia utilizar esse tipo de abordagem na busca de critérios que permitam a seleção de áreas e/ou anomalias geoquímicas em regiões de baixa densidade de amostragem, bem como estudar e conhecer melhor as relações custo-benefício das várias etapas sucessivas de amostragem geoquímica, o que parece ser uma utilização realmente muito interessante.

As conclusões obtidas sobre as 5773 amostras coletadas em uma superfície total de duzentos e cinquenta mil quilômetros quadrados na região da Fennoscândia (Noruega) são de que as dimensões fractais se situam entre 2,1 e 2,9. O valor de 2,9 foi encontrado para dez dos elementos analisados (**Al, Ba, Ca, Fe, Li, Mg, Sc, Sr, V e Zn**), e para os demais onze elementos os resultados obtidos foram considerados pelos autores como inconclusivos devido, talvez, a problemas de baixa precisão dos resultados analíticos disponíveis.

## GEOFÍSICA E GEOESTATÍSTICA

Em termos estatísticos pode-se dizer que campos ou funções fractais são aqueles cujas distribuições de probabilidade, quando apropriadamente normalizadas, podem ser expressas sob formas que não variam com as escalas em que são representadas.

Em Geofísica, por exemplo, é sugerida a existência de correlação entre as propriedades fractais das imagens obtidas via satélite ou radar, por exemplo, que seriam registros de radiações emitidas, refletidas ou espalhadas a partir da superfície topográfica, com os resultados geofísicos obtidos, pois que as imagens seriam apenas uma resposta a processos tais como erosão e/ou intemperismo.

Bruno e Raspa (1989) relacionam as teorias geoestatística e fractal, bem como Remacre (1990), que diz que "a intenção então é mostrar que a análise variográfica e a dimensão fractal basicamente significam a mesma coisa, ou seja tem como finalidade caracterizar o grau de irregularidade dos fenômenos em estudo. Os resultados, no entanto, são diferentes". Ainda segundo Remacre, "o mérito dos modelos fractais é justamente de fazer com que a modelagem geoestatística se torne menos genérica no que tange ao comportamento próximo à origem", referindo-se aos tipos de variogramas no que diz respeito ao comportamento dos mesmos próximo à origem e conseqüente regularidade espacial da variável regionalizada estudada.

## SOLOS

Burrough (1983), especialista no estudo de solos para fins de agricultura, relata que muitos efeitos que agem nos solos, como intemperismo, diferenças de micro-relevo, erosão e atividades biológicas, entre outros, aparecem de forma nítida em certas escalas de trabalho mas apenas como "ruídos" em outras escalas, e que a teoria dos fractais parece contribuir com soluções para resolver os problemas daí decorrentes; seus estudos foram feitos sobre solos da Holanda. Os valores da dimensão fractal se situam geralmente acima de 1,5, enquanto que dados climatológicos, dados de descarga de rios e outros apresentam geralmente valores inferiores a 1,5; os valores de  $D$  tendem a ser mais elevados quando há variações em pequenas distâncias, e menores em casos em que as variações parecem ser menos erráticas.

De todo modo, as propriedades dos solos não apresentam comportamento fractal "ideal", tendo auto-similaridade apenas parcial e limitada a certos intervalos separados entre si por zonas de transição. Uma das causas seria o fato de que os padrões de solo seriam resultado de muitos processos atuantes de forma simultânea. Assim, o enfoque da utilização seria no sentido de que grandes valores de  $D$  (dimensão fractal) indicariam que a campanha executada teria detectado as variações, que seriam irregulares e largamente não correlacionadas; indicariam, também, que a interpolação dos valores das propriedades medidas nos solos não é satisfatória em função da escala utilizada, especialmente no caso de amostras com suporte reduzido em grandes áreas de trabalho.

Em conclusão, embora não de forma "ideal", os dados referentes a solo podem ser considerados como fractais por revelarem, à medida que aumenta o detalhe do trabalho, mais e mais detalhes, faltando a auto-similaridade em todas as escalas.

## CONCLUSÕES

Muito embora as conclusões principais sobre cada uma das utilizações apresentadas já estejam contidas no texto, cabe, ainda, registrar algumas conclusões de ordem mais global. Uma delas é que a estimativa de dimensão fractal ( $D$ ) é uma operação que não apresenta grandes dificuldades, e que os resultados são expressos em valores não inteiros, o que não é "permitido" na geometria euclidiana.

Igualmente importante a ressaltar, e que pode ser considerada como uma das vantagens do método, é que ele abre um novo caminho no estudo e interpretação de variáveis que são, sabidamente, de difícil domínio, como rugosidade, textura e forma de partículas, por exemplo.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BÖLVIKEN,B., STOKKE,P.R., FEDER, J. e JÖSSANG,T. - 1992** - The fractal nature of geochemical landscapes. **Journal of Geochemical Exploration**, vol. 43: 91-109.
- BRUNO,R. e RASPA,G. - 1989** - Geoestatistical characterization of fractal models of surfaces. **Geostatistics, Kluwer Acad. Pub.**, vol 1: 77-89.
- BURROUGH,P.A. - 1983** - Multiscale sources of spacial variation in soil. I: the application of fractal concepts to nested levels of soil variations. **Journal of Soil Science**, 34: 577-597.
- BURROUGH,P.A. - 1983** - Multiscale sources of spacial variation in soil. II: a non-Brownian fractal model and its application in soil survey. **Journal of Soil Science**, 34: 599-620.
- CHAVES,C.M.G.F. - 1989** - Fenômenos de agregação. **Ciência Hoje**, vol. 10, n° 55: 27-32.
- CHILÈS,J.P. - 1988** - Fractal and geostatistical methods for modeling of a fracture network. **Mathematical Geology**, vol 20, n° 6: 631-654.
- FALCONER,K. - 1990** - Fractal geometry - mathematical foundations and applications. **John Wiley & Sons**, 288 p.
- FEDER,J. - 1988** - Fractals. **Plenum Press**.

- GLEICK, J.** - 1990 - Uma geometria da natureza. **Caos, Ed. Campus:** 79-122.
- MANDELBROT, B.B.** - 1967 - How long is the coast of Britain? statistical self-similarity and fractional dimension. **Science, vol. 156, n° 3775:** 636-638.
- MANDELBROT, B.B.** - 1975 - Stochastic models for the Earth's relief, the shape and the fractal dimension of the coastlines, and the number-area rule for islands. **Proc. Natl. Acad. Sci. USA, vol. 72:** 3825-3828.
- MANDELBROT, B.B.** - 1977 - Fractals: form, chance and dimension. **W. H. Freeman,** 365 p.
- MANDELBROT, B.B.** - 1982 - The fractal geometry of nature. **W. H. Freeman,** 460 p.
- ORFORD, J.D.** - 1981 - Particle form: **Geomorph. Techniques, A.S. Goudie: Ed.** 86-90.
- ORFORD, J.D. e WHALLEY, W.B.** - 1983 - The use of fractal dimension to quantify the morphology of irregular-shaped particles. **Sedimentology, vol 30:** 655-668.
- REMACRE, A.Z.** - 1990 - Geoestatística e/ou fractais. 4° Seminário "O Computador e sua Aplicação no Setor Mineral": 70-83.
- TURCOTTE, D.L.** - 1986 - A fractal model for crustal deformation. **Tectonophysics, vol. 132:** 261-269.
- TURCOTTE, D.L.** - 1986 - A fractal approach to the relationship between ore grade and tonnage. **Economic Geology, vol. 81:** 1528-1532.

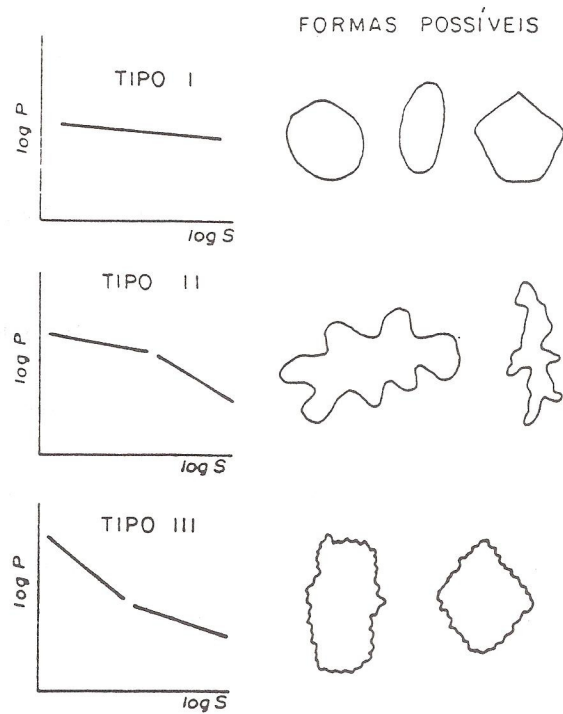


FIGURA 1

*Tipos de estruturas fractais associadas a formas possíveis de partículas*