

O PROBLEMA DO EFEITO DE BORDA NA DETERMINAÇÃO DA
PROFUNDIDADE DE FONTES DE CAMPOS POTENCIAIS CONTINUADOS
ESCALADOS E DE SUAS DERIVADAS VERTICAIS

DE

HUGO LEONARDO DE ANDRADE ROCHA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO
UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

Requisito para a obtenção do título de Mestre em Geologia e Geofísica Marinha

Julho de 2012

BANCA EXAMINADORA:

Professor Doutor Marco Polo Pereira Buonora (Orientador)

(Professor do Laboratório de Geologia Marinha do Instituto de Geociências da Universidade Federal Fluminense)

(Gerente de Métodos Não sísmicos da Petrobras)

Professor Doutor Adalberto da Silva

(Professor do Laboratório de Geologia Marinha do Instituto de Geociências da Universidade Federal Fluminense)

Professor Doutor Alexandre Motta Borges

(Professor do Laboratório de Geologia Marinha do Instituto de Geociências da Universidade Federal Fluminense)

Professora Doutora Cecília Fernandez (Suplente)

(Professora do Departamento de Análise do Instituto de Matemática da Universidade Federal Fluminense)

Telma Aisengart Santos

(Gerente Técnica da empresa Geosoft Latinoamerica)

Data de apresentação da dissertação: 13 de Julho de 2012

Dissertação elaborada por: Hugo Leonardo de Andrade Rocha

ÍNDICE

1. INTRODUÇÃO	1
2. DECONVOLUÇÃO DE EULER	4
3. A METODOLOGIA DEXP	5
3.1 INTRODUÇÃO	5
3.2 CAMPOS ESCALADOS	6
3.3 DERIVADAS VERTICAIS	7
4. MODELAGEM ANALÍTICA	10
4.1 INTRODUÇÃO	10
4.2 CAMPOS ESCALADOS ANALÍTICOS	12
4.3 DERIVADAS VERTICAIS ANALÍTICAS	17
5. OS EFEITOS DE BORDA	22
5.1 INTRODUÇÃO	22
5.2 PREPARAÇÃO DE MAPAS NA FFT	25
5.2.1 EXPANSÃO DE MAPAS	26
5.3 EXTRAPOLAÇÃO: A ENTROPIA MÁXIMA DE PREDIÇÃO	26
6. MODELAGEM NUMÉRICA	29
6.1 INTRODUÇÃO	29
6.2 CAMPOS ESCALADOS NUMÉRICOS E O EFEITO DE BORDA	30
6.3 DERIVADAS VERTICAIS NUMÉRICAS E O EFEITO DE BORDA	45

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS E CONCLUSÕES	52
8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	55
APÊNDICE I: FORMULAÇÃO MATEMÁTICA BÁSICA DA ENTROPIA MÁXIMA DE PREDIÇÃO	56
APÊNDICE II: CONTINUAÇÃO PARA CIMA	62
APÊNDICE III: DERIVADAS DIRECIONAIS	65
APÊNDICE IV: TEOREMA DA CONVOLUÇÃO	69
APÊNDICE V: TEOREMA DE PARSEVAL	71

RESUMO

Este trabalho tem por objetivo estudar um método alternativo para a determinação da posição e dos parâmetros físicos e geométricos de fontes causadoras de anomalias de campos potenciais, tendo sido concebido por Maurizio Fedi (2007), visando contornar as deficiências da Deconvolução de Euler, dentre as quais a mais marcante é o número elevado de soluções para a caracterização das anomalias de campos potenciais. A metodologia recebeu o nome de DEXP, que é a sigla em inglês para "*Depth from Extreme Points*".

O método proposto é corroborado tanto pelo cálculo analítico quanto numérico dos campos escalados e de suas respectivas derivadas parciais verticais de ordem n -ésima. O campo potencial de gravidade é transformado através do produto da função potencial original por diferentes níveis de medição (altitudes) elevados a um expoente de escalamento, o qual está relacionado matematicamente ao índice estrutural da Deconvolução de Euler e cujo valor varia de acordo com a geometria da fonte e a ordem de derivação do campo potencial.

No caso analítico, calcula-se a função do campo potencial de gravidade para diversas altitudes, de maneira a simular um levantamento geofísico em diferentes níveis de observação, tal qual uma continuação para cima analítica. Tal procedimento é feito simplesmente modificando os valores das altitudes na equação que descreve o campo potencial escalado e as suas derivadas verticais. Modelos sintéticos de esferas homogêneas situadas a diversas profundidades são testados a fim de se confirmar a eficácia do método. A posição correspondente ao valor máximo do campo escalado determina a posição do centro de massa da fonte.

No caso das derivadas verticais, foram calculadas as derivadas analíticas de 1ª, 2ª, 3ª e 4ª ordens. Foram testadas esferas homogêneas separadas a distâncias de 8 km entre si, situadas a mesma profundidade. Os valores máximos e mínimos das derivadas analíticas verticais do campo potencial determinam a profundidade do centro de massa das esferas. A derivada vertical analítica revelou-se útil no ao distinguir as esferas, evitando o efeito de interferência mútua. Quanto maior a ordem da derivada vertical analítica do campo escalado, mais precisa é a estimativa das profundidades e mais clara se torna a distinção entre as duas esferas, apesar de esta operação amplificar ruídos de alta frequência, porventura existentes nos dados. Quanto mais próximas entre si estão as esferas, maior é a ordem da derivada necessária para se calcular com boa precisão as profundidades das esferas e vice-versa. Quanto maior a diferença de profundidade entre as esferas, menos preciso se torna o cálculo das profundidades e vice-versa.

No caso numérico, é utilizada também a modelagem da esfera homogênea. A continuação para cima no domínio da transformada de Fourier é aplicada para diferentes níveis. Então, o campo escalado é calculado para cada nível de continuação. As derivadas verticais do campo escalado também são calculadas no domínio da transformada de Fourier. O termo 'derivada vertical numérica' indica que a derivada é calculada utilizando a transformada de Fourier. A principal limitação da derivada vertical no domínio da transformada de Fourier se deve ao fato de que a derivada vertical numérica representa um filtro passa alta, ou seja, que realça os ruídos de altas frequências. Por causa disso, não se calculam derivadas verticais numéricas de ordem superior a dois.

Ainda com relação às derivadas numéricas, temos presentes as demais limitações referentes às derivadas analíticas, ou seja, o cálculo das profundidades das esferas é dificultado quando as duas esferas estão muito próximas entre si, ou então estão situadas a profundidades muito distantes entre si. Novamente, quanto maior a ordem de derivação, melhor é a precisão. Entretanto, as limitações são maiores, pois não é recomendável usar derivadas de ordem maior que dois, enquanto quem no caso analítico, usamos, neste trabalho, derivadas verticais de 1^a, 2^a, 3^a e 4^a ordens.

Os mapas e perfis dos campos escalados, bem como os de suas derivadas verticais, são expandidos a diferentes taxas (0%, 10% e 100%), a fim de se tornar os mapas e perfis periódicos, para adequá-los ao algoritmo de processamento da FFT. Após o processo de expansão, os dados gerados pela expansão são extrapolados com os dados originais da função do campo de gravidade, usando os métodos do inverso do quadrado da distância e da entropia máxima de predição. Uma comparação entre os métodos de extrapolação é feita. A entropia máxima, apesar de mais lenta, produz resultados mais precisos na determinação da amplitude das anomalias e da sua extensão lateral. Verifica-se que, quanto mais profundos estão situados os corpos, mais difícil se torna a determinação correta da anomalia no processo de extrapolação, pois o sinal do espectro é caracteristicamente mais fraco para profundidades maiores. O mesmo problema ocorre quando se realiza uma operação de continuação para cima em um nível muito distante do nível correspondente à profundidade da fonte.

As etapas de expansão e extrapolação são extremamente importantes, pois quando são ignoradas, temos que os efeitos de borda relativos ao truncamento das janelas dos filtros no domínio da transformada de Fourier podem fazer com que as anomalias sejam caracterizadas de maneira equivocada, tanto na sua amplitude quanto na sua extensão lateral, o que pode levar a cálculos errados das profundidades dos corpos causadores de anomalias. O efeito de borda é mais acentuado quando lidamos com anomalias de comprimentos de onda maiores, ou seja, relacionadas a corpos situados a profundidades maiores, que são anomalias tipicamente de amplitude menor, mas com maior extensão lateral. Além disso, o efeito de borda pode se tornar mais crítico também quando fontes causadoras de anomalias estão muito próximas das bordas dos mapas ou quando estão muito próximas entre si. Em outras palavras, o efeito de

borda é mais acentuado quando as anomalias de interesse não são simétricas em relação às bordas da área do levantamento.

Este trabalho analisa mais aprofundadamente os aspectos relativos aos efeitos de borda na filtragem no domínio da transformada de Fourier, oferecendo uma contribuição para a melhoria no processamento de dados geofísicos de campos potenciais e também na metodologia proposta por Fedi (2007), na qual os efeitos de borda foram pouco avaliados. É explicado ainda como o efeito de borda pode afetar a determinação correta das profundidades de fontes causadoras de anomalias de campos potenciais.

ABSTRACT

The goal of this work is to study an alternative method to determining the position and physical and geometric parameters of causative sources of potential fields anomalies, which was developed by Maurizio Fedi (2007), in order to circumvent the limitations of Euler Deconvolution, whose the most highlighted deficiency is a great number of possible solutions for the characterization of the anomalies. The methodology was named of DEXP (Depth from Extreme Points).

The proposed method is corroborated both by the analytical and numerical calculation of the scaled fields and its vertical derivatives of n th orders. The gravity potential field is transformed through the multiplication between the original potential function by different measurement levels (heights) with a scaling exponent, which is mathematically related to structural index (SI) of the Euler Deconvolution, whose values vary according with the geometry of the source and the order of the derivation of the potential field.

In the analytical case, we calculate the function of the gravity potential field for different heights, in order to simulate a geophysical survey at different levels of observation, like an analytical upward continuation. This procedure is done simply by changing the heights values in the equations which describes the scaled potential field and its vertical derivatives. Syntactical models of homogeneous spheres situated at different depths are tested in order to ensure the efficiency of the method. The position which corresponds to the maximum value of the scaled field determines the position of the center of the source.

In the case of the vertical derivatives, we calculated the analytical derivatives of first, second, third and fourth orders. Homogeneous spheres separated by a distance of 8 km, both located at the same depth, were tested. The minimum and maximum values of the analytical vertical derivatives of the potential field were able to determine the depth of the center of mass of the spheres. The analytical vertical derivative was useful to distinguish the spheres, avoiding the effect of mutual interference. As greater is the order of the analytical vertical derivative of the scaled field, more accurate is the estimative of the depths and clearer is the separation between the two spheres, although this type of operation could amplify the level of high frequency noises, which could be inserted in the data. As closer the spheres are, greater is the order of the derivative required to calculate with good accuracy the depths of the spheres. As greater the difference between the spheres, lower is the accuracy the calculation of the depths of the spheres.

In the numerical calculation case, it is used the modeling of the homogeneous sphere. The upward continuation into the Fourier transform domain is applied for different levels of measurement. Then, the scaled field is calculated for each level of continuation. The vertical derivatives of the scaled field are calculated into the Fourier transform domain too. The expression "numerical vertical derivative" flags that the derivative is calculated into the Fourier transform domain. The strongest limitation of the vertical derivative into the Fourier transform domain is related to the fact that the vertical derivative represents a high pass filter, that is, this kind of operation highlights on the high frequency noises. Because of it, it is not a common sense the calculation the numerical vertical derivatives with order greater than 2.

Even with respect to the numerical derivatives, we have the other inherent limitations related to the analytical derivatives, that is, the calculation of the depths of the spheres is harder when the two spheres are not close together. Once again, the greater is the order of derivation, the accuracy is better. However, the limitations are greater, because it is recommendable the using of derivatives with orders greater than 2, while in the analytical case, we use, in this work, vertical derivatives of first, second, third and fourth orders.

The maps and profiles of the scaled fields, as well as of its vertical derivatives, are expanded in order to make the maps and profiles periodical and fit them to the FFT processing algorithm, After the expansion process, the data generated by the expansion are extrapolated with the original data of the function of the original gravity field, using the methods of the "inverse square of distance" and the maximum entropy of prediction. A comparison between the two methods is done. The maximum entropy method, although slower in processing, produces most accurate results for determining the amplitude of the anomalies and its lateral extensions. We verify that, the deeper are the bodies; the hardest is the correct determination of the anomaly in the process of extrapolation, because the spectra signal is naturally weaker for greater depths. The same trouble occurs when we do the upward continuation at a level which is too much far of the level which is related to the depth of the source.

The steps of expansion and extrapolation are extremely important, and if they are ignored, the edge effects related to the truncation of the windows of the filters into the Fourier transform domain can result to anomalies which are characterized in a wrong sense, both in amplitude and lateral contents, leading us to misleading calculations for the depths of the causative bodies of anomalies. The edge effects is more evident when we are leading with greater wavelength anomalies, that is, related to bodies located to greater depths, which are related to the bodies that are located at greater depths, that represent anomalies typically with smaller amplitudes. Moreover, the edge effect can be more critical when the causative sources of anomalies are too much closer to the edges of the maps or when they are too much close together. In other words, the edge effect is more evident when the anomalies of interest are not symmetric to the edges of the survey area.

This work analyzes in a deeper way the aspects related to the edge effects in the filtering into the Fourier transform domain, offering a contribution to an improvement in processing of geophysical potential field data and also in the methodology proposed by Fedi (2007), which the edge effects were under evaluated. It is explained also how the edge effect can affect the correct determination of the depths of causative sources of potential fields anomalies.

1. INTRODUÇÃO

Diversos métodos têm sido utilizados para determinar a profundidade e os parâmetros físicos (densidade e susceptibilidade magnética) de fontes causadoras de anomalias de campos potenciais (campos de gravidade e de magnetismo), bem como o índice estrutural (Fedi, 2007). Dentre tais metodologias, destacam-se a Deconvolução de Euler (Valéria Barbosa e João Batista, 2005), a Deconvolução de Werner (Blakely, 1995) e a Amplitude do Sinal Analítico (Blakely, 1995). O conceito de índice estrutural foi desenvolvido nos moldes da teoria da Deconvolução de Euler e reflete a razão de decaimento da anomalia do campo potencial em função da distância de medição em relação à posição da anomalia (Fedi, 2007). O índice estrutural é um parâmetro importante porque nos traz informações relevantes a respeito da geometria da fonte causadora da anomalia, sendo uma ferramenta de auxílio na elaboração de modelos iniciais para uma metodologia direta de interpretação de dados (Fedi, 2007). Assim, cada tipo de fonte teria um índice estrutural associado a sua característica geométrica, seja cilíndrica, esférica ou similar a algum contato ou dique geológico. Entretanto, a formulação original da Deconvolução de Euler apresentou duas grandes desvantagens: a presença de uma enorme quantidade de possíveis soluções e o critério empírico e ineficiente para estimar o tipo de fonte geológica. (Barbosa, V. e Silva, J. B. 2005).

Dadas as limitações dos diversos métodos de determinação da posição de corpos causadores de anomalias de campos potenciais, Fedi (2007) desenvolveu uma metodologia alternativa que visa contornar os problemas característicos da Deconvolução de Euler, que ele denominou, em inglês, de DEXP, "Depth from Extreme Points", a qual é capaz de determinar a posição e o parâmetro físico característico da fonte a partir da transformação do campo potencial, através da multiplicação da função potencial por níveis de continuação do campo potencial elevados a um expoente de escalamento, o qual possui uma relação matemática com a Deconvolução de Euler. As profundidades das fontes são determinadas a partir da posição dos pontos extremos do campo escalado, que são os pontos que correspondem às singularidades isoladas das funções potenciais escaladas. Isso corresponde a encontrar o ponto simétrico à posição da profundidade em relação ao plano horizontal no sistema de coordenadas cartesianas, ou seja, calcular o valor do campo escalado para uma altitude equivalente em módulo à profundidade na qual a fonte se encontra, considerando as profundidades negativas para baixo. O parâmetro físico característico é calculado a partir dos valores estimados dos campos escalados (Fedi, 2007).

Segundo Fedi (2007), o método é rápido e estável devido ao comportamento regular dos campos potenciais em função da altitude de medição. Como a geometria da fonte é uma informação *a priori*, variando de acordo com o modelo adotado, cada geometria possui um expoente de escalamento diferente. Outro aspecto da metodologia proposta por Fedi é o fato de funcionar bem para as derivadas parciais de ordem n -ésima do campo potencial, uma vez que a função potencial é analítica e harmônica na região de medição, possibilitando que se obtenham analiticamente as derivadas parciais verticais e horizontais de qualquer ordem da função potencial. Para cada ordem de

derivação, um expoente de escalamento diferente é utilizado. É possível ainda estabelecer uma relação matemática entre o expoente de escalamento e a ordem de derivação utilizada na obtenção do campo escalado. O uso das derivadas parciais ajuda a reduzir os efeitos de interferência mútua entre fontes que estejam muito próximas entre si, permitindo a obtenção de uma distribuição de densidades (ou de susceptibilidades magnética) de acordo com a profundidade, evitando erros na determinação das propriedades físicas, uma vez que os contrastes de tais propriedades são obtidos com maior precisão (Fedi, 2007).

Contudo, na prática, lidamos com dados amostrados - e não contínuos - no domínio da distância (ou do tempo), sendo imperativo que se utilize a transformada de Fourier discreta. No entanto, a transformada de Fourier discreta possui um tempo de processamento muito elevado, fato que foi contornado com a disseminação do algoritmo da transformada rápida de Fourier, ou FFT, na sigla em inglês. Apesar disso, a teoria da FFT é baseada na teoria da transformada de Fourier discreta que, por sua vez, se baseia na teoria da transformada de Fourier contínua. Nesse cenário, para podermos calcular o campo escalado em diversas altitudes, faz-se necessária a aplicação de filtragens no domínio do número de onda (ou da frequência), a partir da operação de continuação para cima. Para o cálculo das derivadas do campo escalado, usa-se, também no domínio da transformada de Fourier, o filtro da derivada na direção vertical. Porém, usualmente não se calcula derivadas parciais verticais no domínio da transformada para ordens superiores a 2, devido ao fato de que este filtro é passa alta, ou seja, introduz ruídos de alta frequência nos dados quando não é aplicado com controle adequado dos seus parâmetros. Ainda assim, é possível obter os benefícios da derivação analítica, no caso de estudos teóricos, onde a presença de ruídos pode ser controlada, usando a derivada numérica no domínio da transformada.

Entretanto, quando se trabalha no domínio da transformada de Fourier discreta, frequentemente ocorrem problemas de truncamento dos dados amostrados, por causa do truncamento da janela retangular - cuja transformada é a função $\text{sen } x/x$, que possui lóbulos laterais, os quais se tornam maiores e mais numerosos quando o truncamento é insuficiente para uma dada taxa de amostragem dos dados. Quando o truncamento da janela é inadequado à taxa de amostragem dos dados, as amplitudes das anomalias do espectro no domínio da transformada frequentemente aparecem distorcidas, bem como componentes do espectro correspondentes a números de onda muito grandes, que são correspondentes a fontes situadas a profundidades maiores, dificultando o processo de separação de fontes que estejam muito próximas entre si. Geralmente, os efeitos são visíveis como oscilações nas extremidades dos espectros das anomalias em perfis de duas dimensões ou ainda como elevações espúrias nas bordas dos mapas dos espectros das anomalias em três dimensões. Tal efeito de borda está relacionado ao número empregado de coeficientes do filtro que efetua a transformação do campo potencial original quando do processo de convolução do filtro com o campo potencial original, no domínio do tempo, ou da multiplicação do filtro com o campo potencial no domínio da transformada de Fourier. Ou seja, a atenuação do efeito de borda é proporcional ao

número de coeficientes utilizados pelos filtros que efetuam as transformações nos campos potenciais.

Portanto, o controle do efeito de borda é fundamental para que se obtenha uma caracterização fidedigna da anomalia em perfil (amplitude e largura ou extensão lateral), a fim de que se possa estimar adequadamente a profundidade e os parâmetros físicos e geométricos da fonte causadora da anomalia, uma vez que a amplitude é diretamente relacionada à profundidade do corpo e a largura é relacionada às características geométricas e das propriedades físicas da fonte. Entretanto, infelizmente, quase nunca o efeito de borda recebe uma abordagem adequada quando da etapa de processamento de dados, o que pode induzir à geração de modelos diretos que não condizem com a realidade geológica da área de estudo, quer seja de interesse econômico (para a exploração de hidrocarbonetos e minérios), ou para estudos ambientais, arqueológicos ou de mapeamento geológico.

Para minimizar o efeito de borda, deve-se proceder com uma preparação adequada do mapa original do campo potencial escalado antes que se apliquem as filtragens pertinentes no domínio da transformada. Este processo consiste basicamente das etapas de expansão das dimensões do mapa pela adição de valores nulos nas suas bordas, a fim de tornar tal mapa ou perfil periódico, o que é um requerimento da transformada discreta de Fourier e da FFT, bem como fazer com que o mapa tenha dimensões retangulares, seguido do processo de extrapolação dos dados gerados do processo de expansão com os dados originais do espectro da anomalia. Via de regra, uma boa extrapolação é aquela que consegue reconstruir o espectro original, com o máximo de precisão possível, a partir dos dados originais extrapolados com os dados resultantes da expansão da malha de dados original. Dentre os métodos de extrapolação mais utilizados para tal finalidade, destacam-se a entropia máxima e o inverso do quadrado da distância, que é uma variante do método denominado 'inverso da potência da distância', além do método chamado 'vizinho mais próximo'. O método da entropia máxima foi originalmente concebido por Burg (1975), sendo caracterizado por ser autorregressivo, cujo princípio particular é de que a estimativa do espectro deve ser a mais randômica (ou aleatória) possível, ou, em outras palavras, ter uma entropia maximizada dentro de todos os espectros os quais sejam consistentes com os dados medidos originalmente (Burg, 1975). O termo "autorregressivo" se refere ao fato de que o algoritmo da entropia máxima utiliza um filtro de predição, ou seja, que se vale dos dados originais para estimar o espectro obtido pela extrapolação dos dados originais com os dados originados pela expansão da malha de dados original. Tal filtro de predição pode ser empregado nas operações de convolução e multiplicação e é mais preciso à medida que mais coeficientes são utilizados na sua determinação. Atualmente, o método da entropia máxima tem o seu uso consagrado e com uma eficácia comprovada, por ser mais preciso que as demais metodologias, sendo o mais utilizado com a finalidade de contornar os efeitos de borda e reconstruir o espectro original, apesar de o tempo de processamento ser maior do que o usado nos outros métodos de extrapolação.

Em seu trabalho, Maurizio Fedi (2007) deu uma ênfase muito maior aos cálculos analíticos de sua metodologia, apenas citando brevemente a parte numérica e a filtragem no domínio de Fourier, sem entrar em maiores detalhes. Esta dissertação se propõe a analisar em maior profundidade os aspectos relativos aos efeitos de borda na filtragem no domínio da transformada e aplicar estes conceitos à metodologia proposta por Maurizio Fedi (2007), oferecendo, dessa maneira, a sua contribuição a uma melhoria e excelência no fluxo de processamento de dados geofísicos de campos potenciais, aprimorando, deste modo, a metodologia proposta por Maurizio Fedi (2007).

2. A DECONVOLUÇÃO DE EULER

Os métodos para a estimativa de fontes magnéticas e gravimétricas pode ser classificados em duas categorias: aqueles que analisam uma anomalia única e isolada e aqueles que analisam um perfil ou mapa sobre inúmeras fontes causadoras de anomalias.

A deconvolução de Euler é um método de interpretação automática que fornece uma estimativa da posição horizontal e da profundidade de fontes anômalas a partir de dados de campos potenciais. Originalmente, este método foi amplamente utilizado para interpretar um grande volume de dados aeromagnéticos devido à alta velocidade de processamento e à ausência de necessidade de conhecimento da geometria da fonte geológica anômala e do vetor de magnetização das fontes. Entretanto, a formulação original deste método apresentou duas grandes desvantagens: a presença de uma enorme quantidade de possíveis soluções e o critério empírico e ineficiente para estimar o tipo de fonte geológica (Barbosa, V. e Silva, J. B., 2005).

A anomalia gravimétrica de campo total $T \equiv T(x, y, z)$ não corrigida de um campo regional constante e produzida por uma fonte pontual 3D situada nas coordenadas x_0, y_0, z_0 , referidas a um sistema cartesiano, satisfaz à equação homogênea de Euler:

$$(x - x_0) \frac{\partial}{\partial x} T + (y - y_0) \frac{\partial}{\partial y} T + (z - z_0) \frac{\partial}{\partial z} T = -\eta T \quad (1)$$

, em que η é um parâmetro conhecido como índice estrutural, sendo uma medida da taxa de decaimento da anomalia gravimétrica em função da distância entre a fonte e o ponto de medida, ou seja, um indicador da forma geométrica da fonte anômala.

Por exemplo, temos que o índice estrutural é zero para um contato geológico, tem o valor unitário para um dique vertical ou uma soleira, vale 2 para um cilindro horizontal ou vertical e equivale a 3 para uma esfera ou um dipolo (Barbosa, V. e Silva, J. B., 2005).

Conforme mencionado anteriormente, além das limitações citadas, podem-se ainda relacionar outras deficiências, conforme explicitado por (Barbosa, V. e Silva, J. B., 2005):

1. A dificuldade de aplicar o método em levantamentos com poucos dados de observações;
2. A impossibilidade da determinação de outros parâmetros;
3. A ineficácia em ambientes complexos consistindo de múltiplos corpos interferentes laterais e verticais dentro de uma mesma janela;
4. A impossibilidade de integração das soluções da deconvolução de Euler com modelagem geológica 2D ou 3D.

3. A METODOLOGIA DEXP

3.1 INTRODUÇÃO

A metodologia DEXP, abreviatura em inglês para (*Depth from Extreme Points*), ou, em tradução livre, ‘Profundidade dos Pontos Extremos’, tal como foi elaborada por Maurizio Fedi, transforma campos potenciais, bem como as suas derivadas n -ésimas, através da multiplicação da função que descreve o campo potencial original por um nível continuação elevado a um expoente relacionado ao índice estrutural da teoria da deconvolução de Euler, que foi abordada no primeiro capítulo. Logo, o expoente de escalamento depende da forma geométrica do corpo causador da anomalia.

Como a função do campo potencial original obedece à Equação de Laplace, na região harmônica, temos que a função potencial é analítica e, portanto, pode ser diferenciável n vezes. Essa propriedade é importante, pois garante que o método funcione também para as derivadas do campo potencial. Por outro lado, a transformação do campo potencial relaciona o expoente de escalamento com a ordem da derivada do campo potencial. Em outras palavras, para cada ordem de derivação, temos um expoente de escalamento específico.

Segundo Maurizio Fedi, o método DEXP permite estimar a profundidade de uma fonte causadora de uma anomalia de campo potencial, além da sua densidade, sendo uma metodologia rápida e estável, pois aproveita o comportamento regular dos campos potenciais em função da altitude. De acordo com a metodologia proposta por Maurizio Fedi, a profundidade da fonte é obtida a partir dos valores extremos do campo transformado e a densidade é obtida a partir dos valores do campo transformado (ou escalado).

O uso das derivadas verticais ajuda a minimizar os efeitos indesejáveis de interferências mútuas no caso onde há mais de uma fonte ocasionando a anomalia gravimétrica, auxiliando ainda na obtenção de representações fidedignas da distribuição de fontes de acordo com as profundidades das mesmas.

3.2 CAMPOS ESCALADOS

A função de escalamento (ou de transformação) do campo potencial é definida como sendo a derivada do logaritmo do campo potencial original f com respeito ao logaritmo da direção vertical $\log(z)$ (Fedi, 2007):

$$\tau(z) = \frac{\partial \log[f(z)]}{\partial \log(z)} \quad (2)$$

No caso do campo potencial originado por uma massa pontual, denotado por f_1 , temos, segundo a equação (5) de (Fedi, 2007):

$$\tau_1 = -\frac{2z}{z-z_0} \quad (3)$$

A função τ_1 , como esperado, possui uma singularidade isolada no ponto $z = z_0$. Como $\lim_{z \rightarrow z_0} |\tau_1| = +\infty$, temos que a função τ_1 possui um pólo simples em z_0 . Portanto, a função τ_1 possui uma representação em série de Laurent em torno do ponto z_0 , sendo que apenas um dos coeficientes da parte analítica da expansão de τ_1 em série de Laurent é diferente de zero, justamente no ponto z_0 . Logo, a função de escalamento é analítica em toda vizinhança do ponto z_0 - exceto no ponto propriamente dito - possuindo derivadas de ordem n nessa vizinhança. Mais ainda, se considerarmos $z = -z_0$, temos que $\tau_1 = -1$.

De fato:

$$\tau_1(z = -z_0) = \frac{\partial \log[f_1(z)]}{\partial \log(z)} = -1 \quad (4)$$

Segundo as equações (9) e (10) de Fedi (2007), a derivada da função do campo potencial escalado se anula no pólo simples $z = -z_0$, e que tal função do campo potencial escalado, denotada por W_g , é dada pelo produto da função da função f_1 original com a altitude (nível de continuação) z elevada ao expoente de escalamento:

$$\frac{\partial z f_1}{\partial z}(z = -z_0) = 0 \Leftrightarrow W_g = f_1 z \quad (5)$$

Em outras palavras, a derivada da função do campo potencial transformado é sempre nula para o ponto onde a função de escalamento apresenta uma singularidade isolada. Portanto, o extremo do campo potencial transformado para uma massa pontual está situado em $z = -z_0$, pois a sua derivada se anula nesse ponto. A rigor, os pontos extremos do campo potencial transformado são: $x = x_0, y = y_0$ e $z = -z_0$. O campo potencial transformado (ou escalado) para o caso de uma massa pontual é denotado por W_g .

Caso consideremos apenas contrastes positivos de densidades, então as coordenadas $x = x_0, y = y_0$ e $z = -z_0$ indicarão um máximo absoluto para o campo potencial transformado. Caso contrastes negativos de densidades sejam considerados, tais coordenadas serão um mínimo absoluto do campo potencial escalado.

O expoente de escalamento é o expoente que aparece no fator z , relacionado à altitude considerada para as medidas do campo potencial, a qual é multiplicada pelo campo potencial original. No caso de uma massa pontual, o expoente de escalamento vale 1 (Fedi, 2007).

3.3 DERIVADAS VERTICAIS

O escalamento do campo potencial vale também para as derivadas parciais verticais do campo potencial gravimétrico original, pois se trata de uma função analítica em uma região exterior à fonte. Analogamente, podemos expandir em série de Laurent a função de escalamento correspondente para as derivadas verticais do campo potencial original em torno das singularidades isoladas a fim de se encontrar a profundidade e densidade da fonte causadora da anomalia em estudo.

No caso da derivada vertical de primeira ordem do campo potencial gravimétrico original, assumindo que a densidade é unitária e considerando que a fonte causadora da anomalia gravimétrica está posicionada nas coordenadas cartesianas $r_0(0,0,z_0)$.

Para $y = 0$ e normalizando a expressão do campo potencial original pela constante universal da gravitação, obtemos a derivada vertical de 1ª ordem do campo de gravidade original (Fedi, 2007):

$$f(x, z) = \frac{2(z-z_0)^2 - x^2}{[x^2 + (z-z_0)^2]^{5/2}} \quad (6)$$

Segundo Fedi (2007), a função de escalamento correspondente, para $x = x_0 = 0$, é dada por:

$$\tau(z) = \frac{\partial \log(f)}{\partial \log(z)} = -3 \frac{z}{z-z_0} \quad (7)$$

No caso da derivada vertical de 1ª ordem do campo gravimétrico original, o expoente de escalamento de uma massa pontual será dado, segundo Fedi (2007), por:

$$\tau_2(z = -z_0) = \frac{\partial \log[f_2(z)]}{\partial \log(z)}(z = -z_0) = -1.5 \quad (8)$$

Podemos generalizar os resultados obtidos na derivada vertical de primeira ordem para as derivadas de n -ésima ordem, para o caso de uma massa pontual. O campo potencial gravimétrico original é dado, ainda segundo Fedi (2007), por:

$$f_n(z) = \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}} \quad (9)$$

Conforme preconizou Fedi (2007), a função de escalamento generalizada é obtida de modo similar aos casos anteriores:

$$\tau_n = \frac{\partial \log[f_n(z)]}{\partial \log(z)} = -\frac{(n+1)z}{z-z_0} \quad (10)$$

A função de escalamento generalizada, τ_n , possui uma singularidade isolada no ponto z_0 e possui uma representação em série de Laurent em torno desse ponto. De modo análogo, é possível demonstrar que o índice estrutural envolvido na deconvolução de Euler é dado pelo coeficiente a_{-m} da expansão da função de escalamento generalizada em série de Laurent para o termo que contém o pólo. O valor do índice estrutural é numericamente igual ao valor do resíduo da expansão da série de Laurent. O expoente de escalamento da transformação DEXP será sempre a metade desse valor. De fato:

$$\tau_n(z = -z_0) = \frac{\partial \log[f_n(z)]}{\partial \log(z)} = -\frac{(n+1)}{2} \quad (11)$$

Logo, o campo potencial gravimétrico transformado (ou escalado) será dado pelo produto da função que descreve o campo potencial gravimétrico original pela altitude de medição elevada ao correspondente expoente de escalamento.

Além disso, os pontos extremos do campo potencial gravimétrico transformado generalizado, denotado por W_{gn} , serão dados pelas coordenadas $x = x_0, y = y_0, z = -z_0$ -que coincidem com a singularidade isolada da função de escalamento - pois a sua derivada se anula para tais coordenadas. Logo:

$$W_{gn} = z^{\alpha_n} f_n \quad (12)$$

, onde α_n representa o expoente de escalamento generalizado.

Por sua vez, o expoente de escalamento generalizado, para o caso de uma fonte pontual, é dado por:

$$\alpha_n = -\tau_n(z = -z_0) = 0.5(n + 1) \quad (13)$$

A partir das informações fundamentadas nos parágrafos anteriores, podemos elaborar uma tabela que contenha a expressão para o cálculo do expoente de escalamento para as principais formas geométricas de fontes, de acordo com a ordem da derivada vertical do campo escalado, comparando o expoente de escalamento da metodologia DEXP ao índice estrutural da Deconvolução de Euler:

TABELA 1: EXPRESSÕES MATEMÁTICAS PARA O CÁLCULO DOS EXPOENTES DE ESCALAMENTO COM EXEMPLOS PARA DIVERSAS GEOMETRIAS DE FONTES E COMPARAÇÃO COM O ÍNDICE ESTRUTURAL DA DEVONCOLUÇÃO DE EULER. EXTRAÍDA DE FEDI (2007):

α_1 : expoente de escalamento para o campo escalado

α_2 : expoente de escalamento para a derivada parcial vertical de 1ª ordem do campo escalado

α_3 : expoente de escalamento para a derivada parcial vertical de 2ª ordem do campo escalado

S_1 : índice estrutural da deconvolução de Euler para o campo escalado

S_2 : índice estrutural para a derivada parcial vertical de 1ª ordem do campo escalado

S_3 : índice estrutural para a derivada parcial vertical de 2ª ordem do campo escalado

Tipo de fonte	α_1	α_2	α_3	Expressão geral do expoente de escalamento	S_1	S_2	S_3
Massas pontuais; esferas	1	1.5	2	$\alpha_n = 0.5(n + 1)$	2	3	4
Cilindros horizontalmente e verticalmente infinitos	0.5	1	1.5	$\alpha_n = 0.5n$	1	2	3

4. MODELAGEM ANALÍTICA

4.1 INTRODUÇÃO

Iniciamos o estudo da metodologia DEXP simulando o efeito da atração gravitacional de esferas homogêneas situadas na profundidade de 2 km, com raio de 500 m e densidade de 3000 kg/m^3 cada uma. Quando se utiliza o termo "esfera homogênea", subentende-se que a densidade da esfera é constante em todo o seu volume. Os campos escalados e as suas derivadas verticais de 1ª, 2ª, 3ª e 4ª ordens foram obtidos analiticamente em perfis e em mapas 2D e 3D.

Considerando G como sendo a constante universal da gravitação, temos que a atração gravitacional exercida por uma esfera homogênea de densidade ρ e raio r sobre uma partícula de massa unitária localizada em um ponto externo, distante l do seu centro, é dada por:

$$F = \frac{4G\pi\rho r^3}{3l^2} \quad (14)$$

Adotando o sistema cartesiano de coordenadas, temos que a distância l da equação anterior entre as coordenadas do centro da esfera, denotadas por (x_0, y_0, z_0) e as coordenadas do ponto de medição, denotadas por (x, y, z) , é dada por:

$$l = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} \quad (15)$$

Assim, podemos reescrever a equação da atração gravitacional exercida por uma esfera homogênea, no ponto $P(x, y, z)$, como segue:

$$F = \frac{4G\pi\rho r^3}{3[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]} \cdot 10^5 \quad (16)$$

Na equação acima, o fator 10^5 é usado para conversão das unidades do SI para o mGal, uma vez que a unidade adotada para a densidade foi o kg/m^3 , a unidade usada para o raio da esfera foi o metro e a unidade utilizada para os níveis de continuação e para as coordenadas cartesianas do centro de massa da esfera e do ponto de observação foi o metro, a fim de atender às unidades do SI.

A unidade de medida dos campos escalados é $(\text{mGal} * z)$, onde z representa o valor do nível de continuação para o escalamento do campo.

O cálculo analítico do campo de gravidade original e do campo escalado, bem como das suas derivadas verticais, para diferentes níveis de medição, é feito simplesmente substituindo o valor de z na equação que descreve a atração gravitacional exercida pela esfera para o nível de medição desejado.

Em geral, as fontes geram campos potenciais tais que eles não podem ser aproximados por uma massa pontual, a menos que o plano de medição da anomalia esteja a uma distância grande o suficiente do centro de massa anomalia. No caso da esfera homogênea, podemos considerar que toda a massa está concentrada no seu centro geométrico, que coincide com o centro de massa. Portanto, as equações desenvolvidas para o cálculo do campo escalado e de suas derivadas para fontes pontuais são válidas para a modelagem das esferas homogêneas.

Conforme foi visto no capítulo da metodologia DEXP, o valor correto da profundidade da esfera é o que corresponde ao nível de continuação para o qual o campos escalados (ou suas derivadas verticais) atingem o valor máximo. Quando se calcula a derivada vertical do campo escalado e contrastes positivos de densidades entre os corpos, a profundidade da fonte é dada para o nível de continuação no qual temos um máximo absoluto e quando temos contrastes negativos de densidade, o valor da profundidade corresponde a um mínimo absoluto (Fedi, 2007).

Os valores de densidades podem ser verificados a partir dos valores máximos campos escalados e utilizando os seus valores máximos, como segue na formulação abaixo:

$$\rho = \frac{3W_g[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]}{4G\pi r^3 z_{g1} \cdot 10^5} \quad (17)$$

Na equação acima, W_g representa o campo escalado gerado pela esfera homogênea e z_g é o nível de continuação para o qual o campo escalado atinge o seu valor máximo.

Com relação à derivada de primeira ordem do campo escalado referente a uma esfera homogênea, temos:

$$F_z = -(2) \left(\frac{4}{3}\right) \left[\frac{G\pi\rho r^3(z - z_0)}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2)^2} \right] \cdot 10^5 \quad (18)$$

O campo escalado da derivada vertical de primeira ordem, denotado por W_{g2} , é dado pelas relações a seguir:

$$W_{g2} = F_z z^{3/2} = \left\{ -(2) \left(\frac{4}{3}\right) \left[\frac{G\pi\rho R^3(z - z_0)}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2)^2} \right] \right\} \cdot z^{3/2} \cdot 10^5 \quad (19)$$

A densidade da esfera para a derivada vertical de 1ª ordem pode ser obtida de maneira similar à do campo escalado:

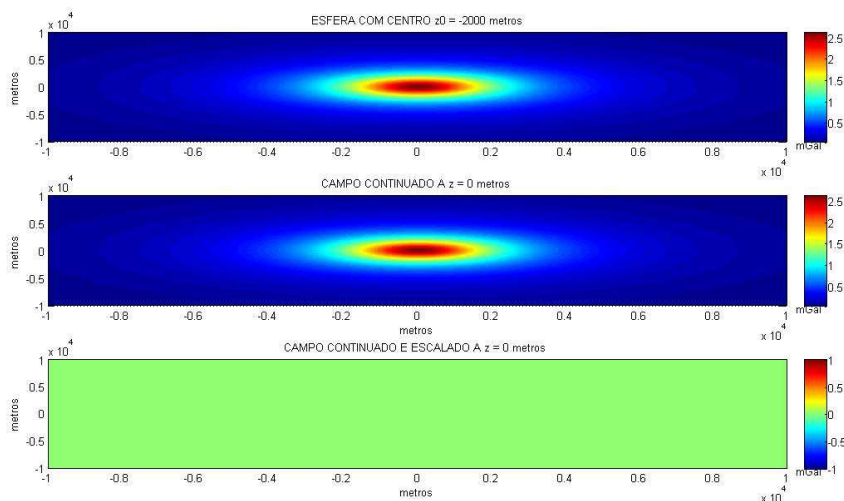
$$\rho = \frac{-3W_g[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^2}{8G\pi r^3(z - z_0)z_g^{3/2} \cdot 10^5} \quad (20)$$

Na equação acima, z_g representa o nível de continuação para o qual a derivada vertical de 1ª ordem do campo escalado possui um máximo absoluto.

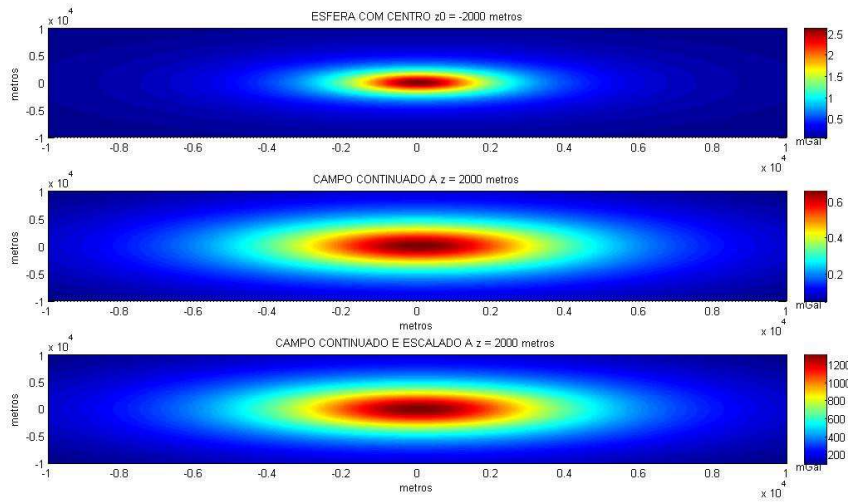
Analogamente ao que foi feito para a derivada vertical de 1ª ordem, podemos elaborar as formulações matemáticas pertinentes para as derivadas de 2ª, 3ª e 4ª ordens. É importante frisar que as derivadas de 3ª e 4ª ordens foram calculadas apenas analiticamente para testar a metodologia, uma vez que, na transformada de Fourier, a derivada vertical representa uma operação que amplifica ruídos de alta frequência que existem quando se trabalha com dados reais, razão pela qual se utiliza, em fluxos de processamentos de dados geofísicos usuais, somente derivadas de 1ª e 2ª ordens, sendo comumente necessária a aplicação de um filtro assa baixa, como é o caso da continuação para cima.

4.2 CAMPOS ESCALADOS ANALÍTICOS

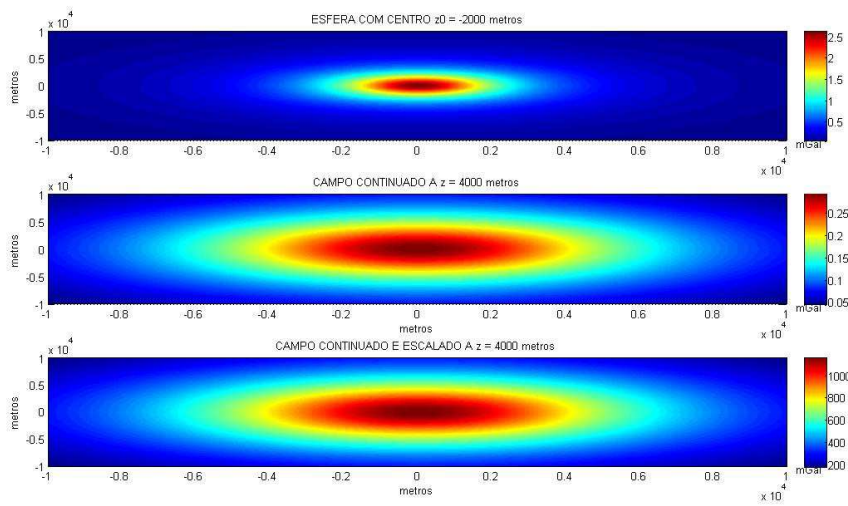
Primeiramente, é modelada uma esfera homogênea situada a 2 km de profundidade. Com o uso de um algoritmo elaborado no MATLAB, calcula-se analiticamente o campo de gravidade gerado pela esfera para os níveis de continuação de 0 km, 2 km, 4 km, 6 km, 8 km e 10 km. Mapas 2D da anomalia de gravidade, da anomalia continuada analiticamente para os diferentes níveis de medição anteriormente listados, bem como do campo escalado analítico, foram gerados no MATLAB a fim de se ilustrar o efeito da continuação analítica e do escalamento do campo de gravidade. Vale notar que, para o nível de observação de 0 km, o campo escalado se anula, devido à própria equação que descreve o campo escalado. Quanto maior é o nível de continuação, ou quanto mais o nível de continuação é distante do nível correspondente à profundidade da fonte, mais atenuada se torna a anomalia. Os mapas representativos de uma esfera a 2 km de profundidade estão exibidos a seguir, na figura 1:



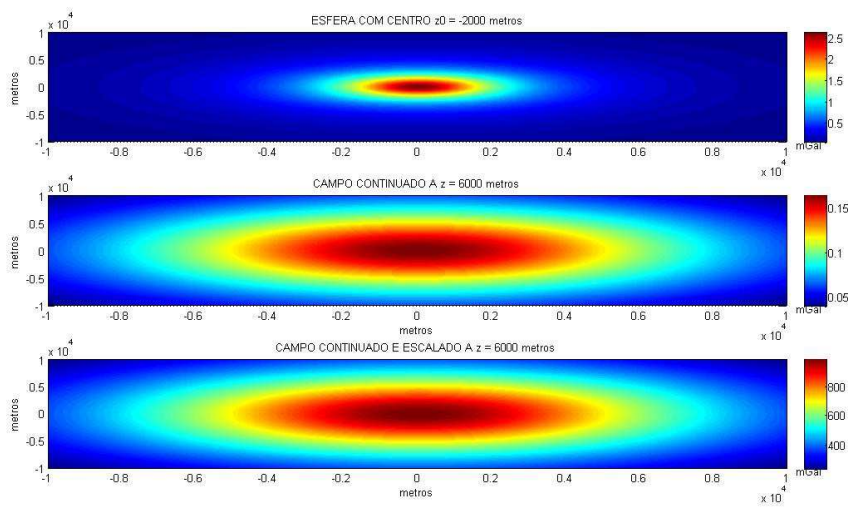
(a)



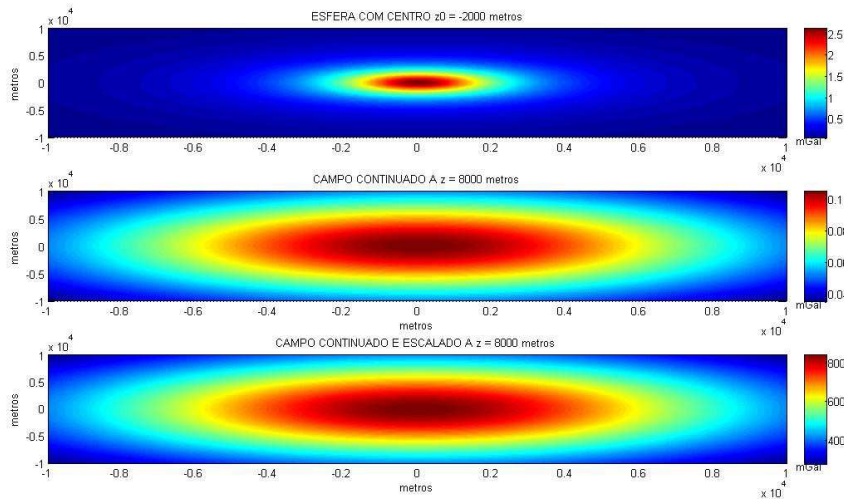
(b)



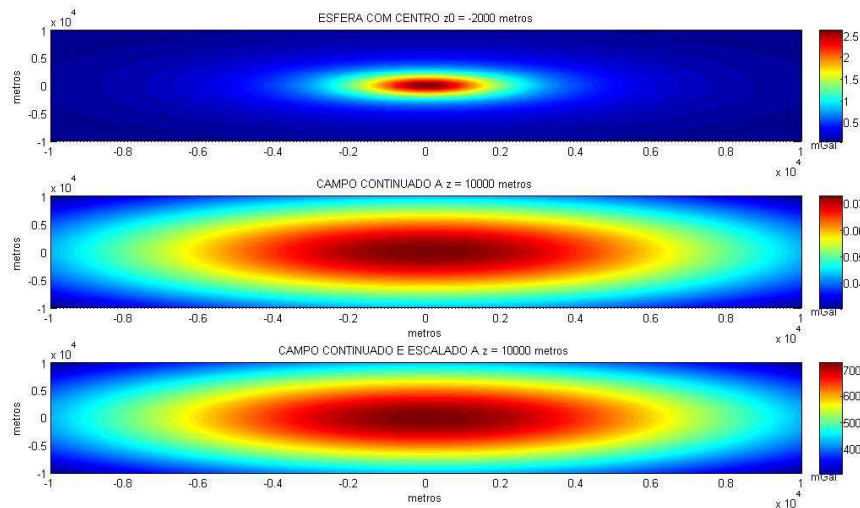
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura 1: Campo gravimétrico e campo escalado gerados por uma esfera homogênea a 2 km de profundidade continuados para cima para os níveis de continuação de 2 km, 4 km, 6 km, 8 km e 10 km. A primeira linha indica o campo gravitacional original. A segunda linha indica o campo gravitacional original continuado para o nível de continuação indicado. A terceira linha indica o campo gravitacional original escalado para o nível de continuação indicado. Notar que a operação de continuação atenua a anomalia gerada pela esfera homogênea, atenuação que é diretamente proporcional ao incremento do nível de continuação em relação à superfície de medição, cujo nível é o de 0 km. (a) Nível de continuação de 0 km; (b) Nível de continuação de 2 km; (c) Nível de continuação de 4 km; (d) Nível de continuação de 6 km; (e) Nível de continuação de 8 km e (f) Nível de continuação de 10 km.

A seguir, foram gerados mapas 3D do campo de gravidade e do campo de gravidade escalado gerado pela esfera. Considera-se que o eixo z, representativo das profundidades, é negativo para baixo e que as profundidades aumentam, em módulo, para baixo. Os dados foram continuados analiticamente na direção vertical em vários níveis, num intervalo de 1000 m entre um nível e outro. Na direção horizontal (eixos x e y), o intervalo de amostragem foi de 200 m. Todos os mapas 3D foram gerados na plataforma do *software Oasis montaj*, de propriedade da empresa **Geosoft**. A metodologia DEXP mostra-se eficiente, de modo tal que o mapa 3D do campo escalado consegue identificar a profundidade da esfera adequadamente, com a amplitude máxima do campo escalado se situando em torno da profundidade de 2 km. A figura 2 a seguir ilustra o mapa em três dimensões do campo potencial gravitacional original. A figura 3 ilustra o campo de gravidade escalado.

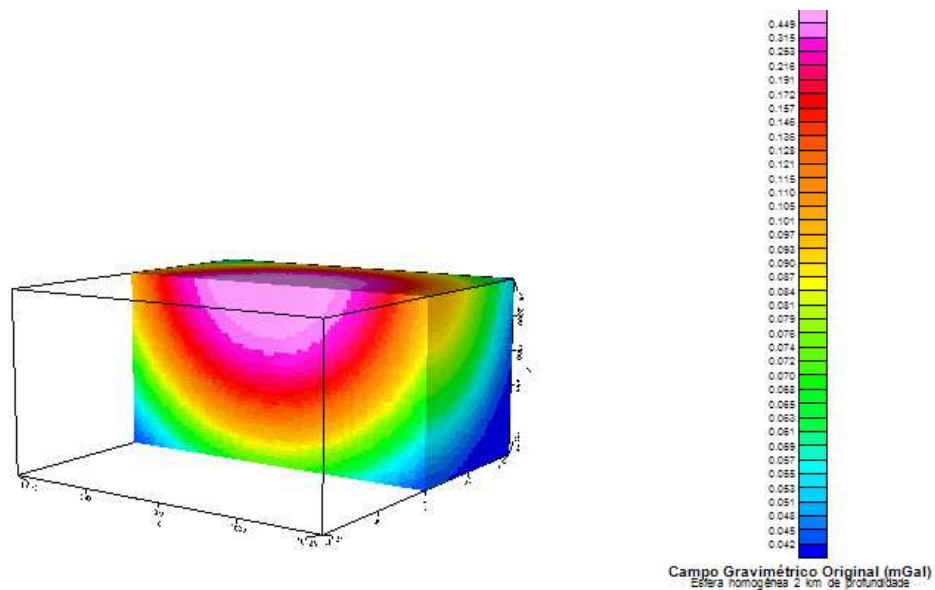


Figura 2: Mapa 3D gerado para o campo potencial gravitacional gerado por uma esfera homogênea situada a 2 km de profundidade.

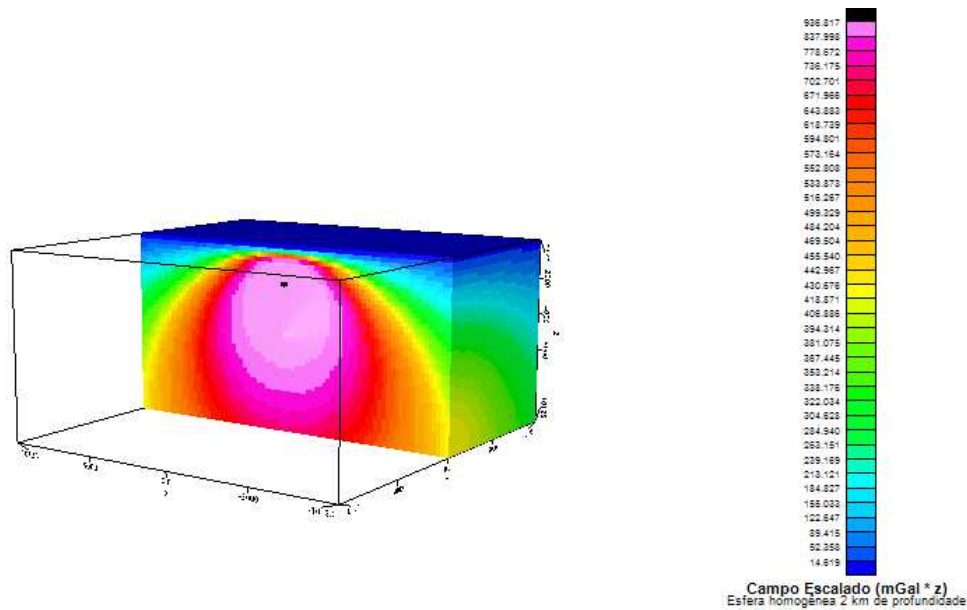


Figura 3: Mapa 3D gerado para o campo potencial gravitacional escalado gerado por uma esfera homogênea situada a 2 km de profundidade. Neste caso, a profundidade da esfera é determinada corretamente e está representada pelo ponto preto, o qual corresponde ao valor máximo do campo escalado situado na singularidade isolada localizada a 2 km de profundidade.

Algumas fontes reais de geometrias mais complexas podem ser aproximadas por geometrias mais simples de serem modeladas, como sólidos semi-infinitos em duas dimensões. Um exemplo disso é o caso de um cilindro de comprimento infinito na direção y , cuja geometria pode ser utilizada para modelar diversas situações geológicas verossímeis. Assim como no caso da esfera, podemos considerar o cilindro horizontalmente infinito em duas dimensões, de modo que precisamos da coordenada cartesiana de apenas um ponto, que é o centro de massa do cilindro, para calcular o campo de gravidade e o campo escalado analiticamente. Assim, podemos obter uma representação em um mapa 2D, feito no MATLAB, do campo escalado para a modelagem do cilindro. No caso deste trabalho, foi modelado um cilindro de comprimento infinito na direção y , de raio igual a 1000 metros e densidade de 1 kg/m^3 , com centro de massa situado a 2 km de profundidade. O mapa 2D do campo escalado tem em seu eixo y os níveis de continuação para os quais o campo analítico foi calculado. É possível notar claramente que o valor máximo do campo escalado se situa para o nível de continuação de 2 km, o qual corresponde ao ponto branco na figura 4 seguinte:

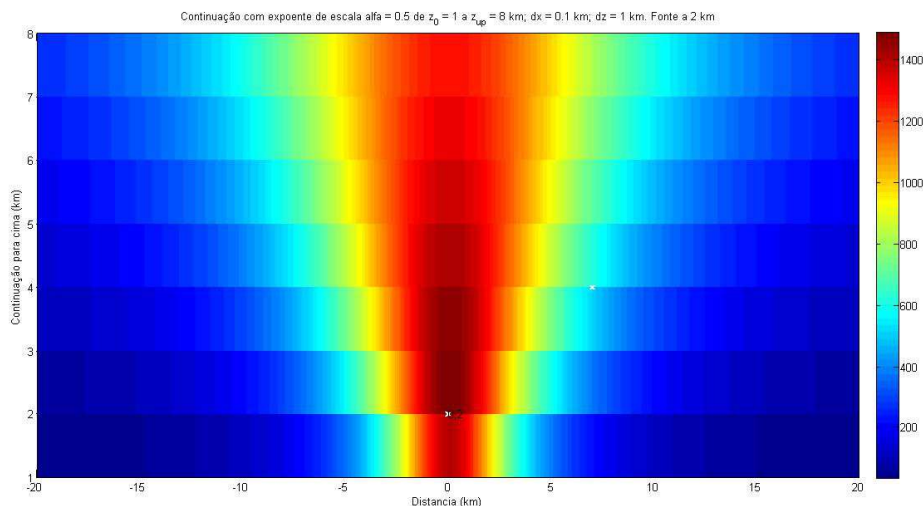


Figura 4: Mapa 2D para o campo escalado gerado por um cilindro homogêneo de comprimento infinito na direção horizontal, situado a uma profundidade de 2 km. Notar que o valor máximo do campo escalado, representado na figura pelo ponto branco, coincide com o valor da profundidade do cilindro.

4.3 DERIVADAS VERTICAIS ANALÍTICAS

Para as derivadas verticais analíticas do campo escalado, também foram gerados mapas 3D no **Oasis montaj** a fim de simular duas esferas homogêneas com separação de 8 km entre si, nos casos em que ambas estão situadas a 2 km de profundidade. Os níveis de continuação para o cálculo das derivadas do campo escalado foram de 0 km até 10 km, com intervalo de amostragem de 1 km, considerando que o módulo da profundidade cresce para baixo que o eixo z é negativo para baixo. Os intervalos de amostragem nas direções dos eixos x e y são de 200 m. A tabela abaixo, juntamente com os respectivos mapas 3D do campo de gravidade original, do campo escalado e das derivadas verticais analíticas de 1ª, 2ª, 3ª e 4ª ordens do campo escalado, ilustram mais claramente a configuração adotada para modelar as derivadas verticais analíticas do campo escalado, indicando as coordenadas cartesianas, profundidades e os parâmetros físicos e geométricos das esferas:

TABELA 2: PARÂMETROS GEOMÉTRICOS E FÍSICOS UTILIZADOS NO CÁLCULO DAS DERIVADAS VERTICAIS DO CAMPO GRAVIMÉTRICO ESCALADO GERADO POR 2 ESFERAS HOMOGÊNAS:

	Coordenadas Cartesianas (x, y,z)	Profundidade	Densidade	Raio
Esfera 1	(-4000, 0, -2000)	2 km	3000 kg/m^3	500 m
Esfera 2	(4000, 0, -2000)	2 km	3000 kg/m^3	500 m

Abaixo seguem os resultados das modelagens analíticas das derivadas verticais em mapas 3D. A figura 5 ilustra o mapa 3D do campo potencial gravitacional original gerado pelas duas esferas homogêneas. A figura 6 mostra o campo potencial gravimétrico escalado. Já as figuras de 7 até 10 ilustram o cálculo da derivadas verticais analíticas de 1ª, 2ª, 3ª e 4ª ordens, respectivamente, para o campo potencial gravimétrico escalado gerado pelas duas esferas homogêneas:

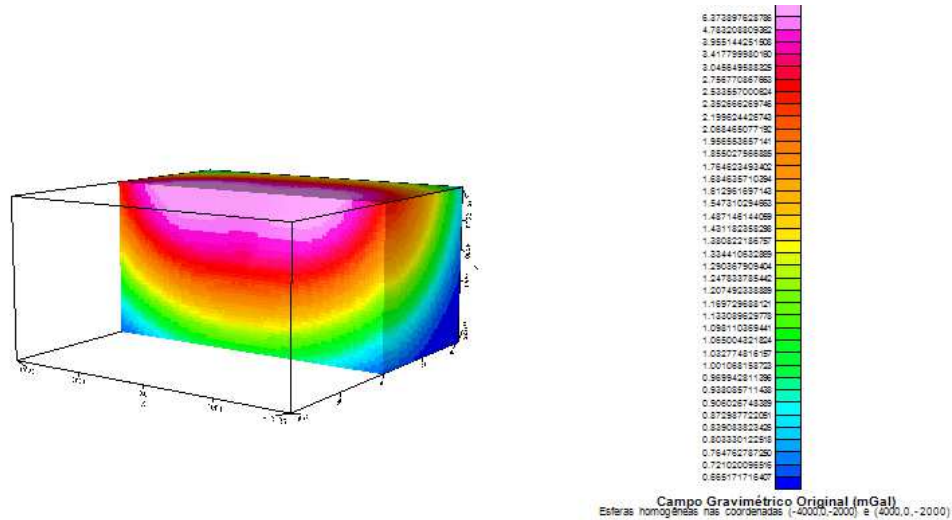


Figura 5: Campo potencial gravitacional gerado por duas esferas homogêneas situadas nas coordenadas cartesianas (-4000, 0, -2000) e (4000,0,-2000). Notar que os valores máximos do campo gravimétrico original estão situados próximos ao nível de continuação de 0 km, o que não equivale à profundidade real das esferas. Além disso, não é possível distinguir as duas esferas geradoras do campo gravimétrico.

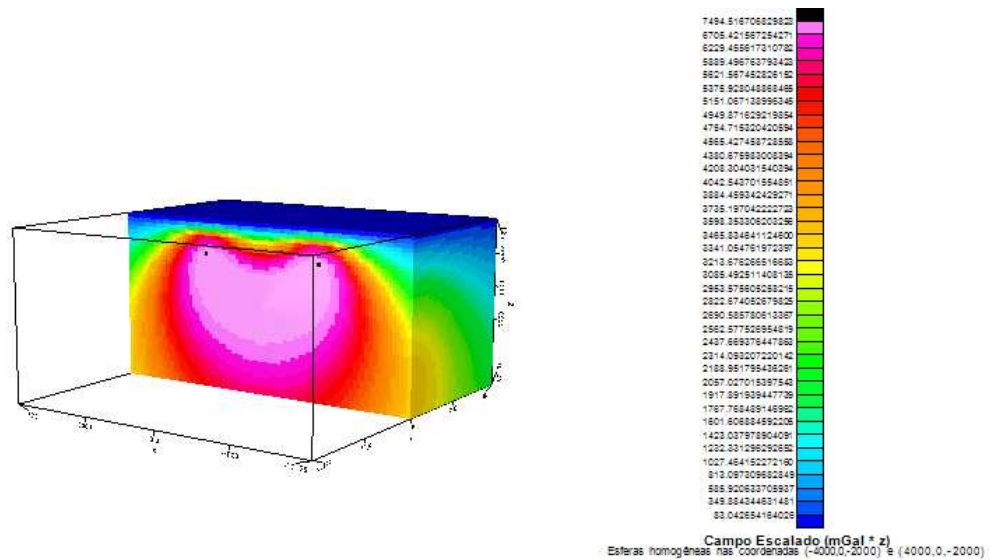


Figura 6: Campo potencial gravitacional escalado gerado por duas esferas homogêneas situadas nas coordenadas cartesianas (-4000, 0,-2000) e (4000,0,-2000). Os pontos pretos representam os valores máximos do campo escalado, correspondendo às profundidades das esferas.

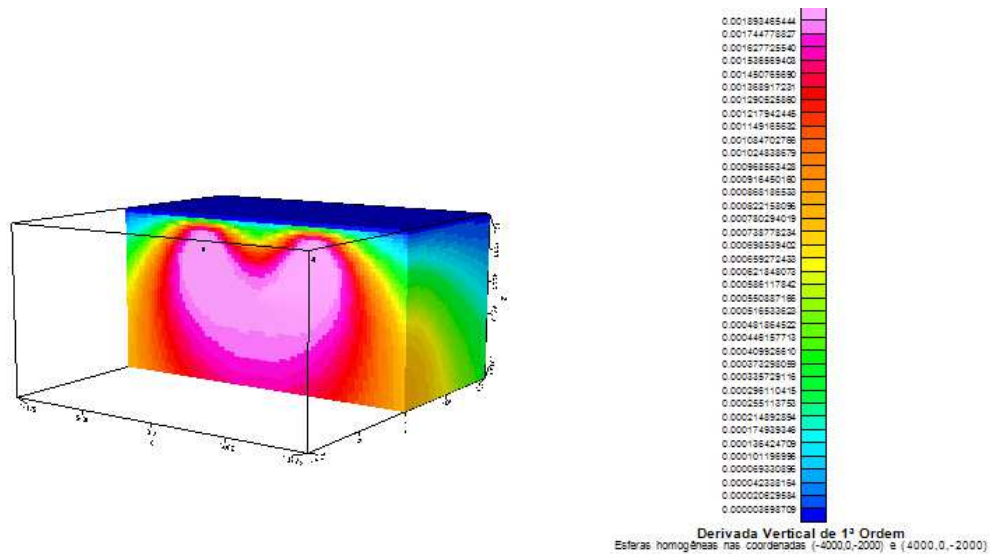


Figura 7: Derivada vertical de 1ª ordem do campo potencial gravitacional escalado gerado por duas esferas homogêneas situadas nas coordenadas cartesianas (-4000, 0, -2000) e (4000,0,-2000). A distribuição de densidades está mais bem determinada do que no caso do campo gravimétrico original, sendo que os valores máximos do campo gravimétrico original escalado, representados pelos pontos pretos, estão localizados a 2 km de profundidade, que é o valor correto. Ademais, já é possível fazer uma distinção melhor entre as duas esferas homogêneas geradoras do campo potencial.

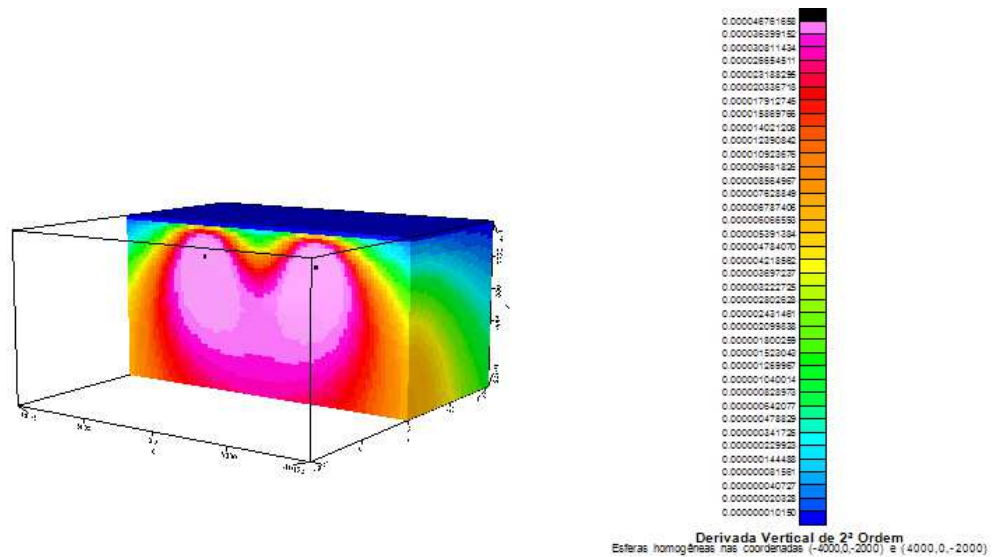


Figura 8: Derivada vertical de 2ª ordem do campo potencial gravitacional escalado gerado por duas esferas homogêneas situadas nas coordenadas (-4000, 0,- 2000) e (4000,0,-2000). Os pontos pretos correspondem aos valores máximos do campo escalado, representando as profundidades das esferas.

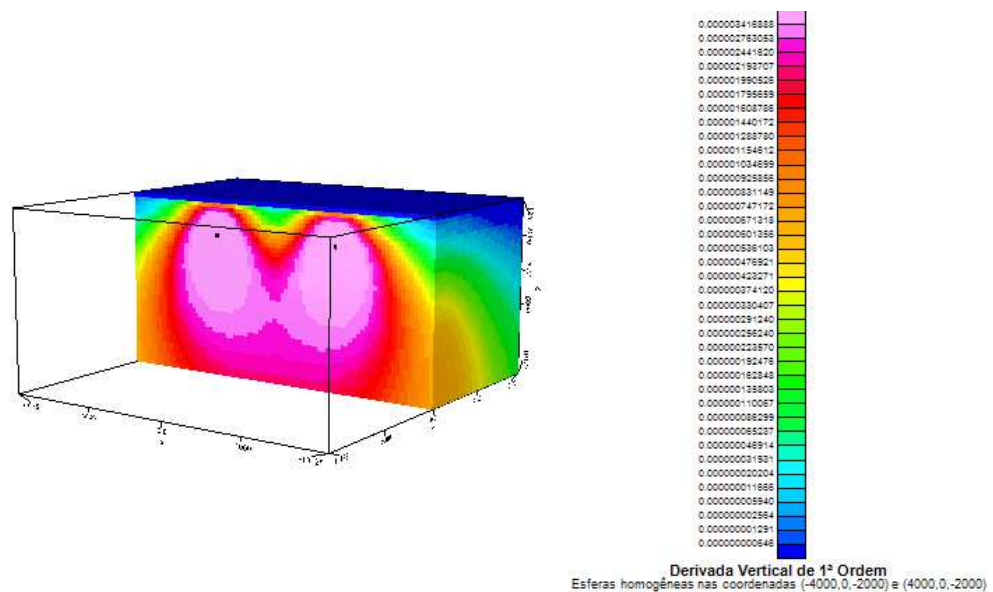


Figura 9: Derivada vertical de 3ª ordem do campo potencial gravitacional escalado gerado por duas esferas homogêneas situadas nas coordenadas (-4000, 0,-2000) e (4000,0,-2000). Os pontos pretos correspondem aos valores máximos do campo escalado, representando as profundidades das esferas.

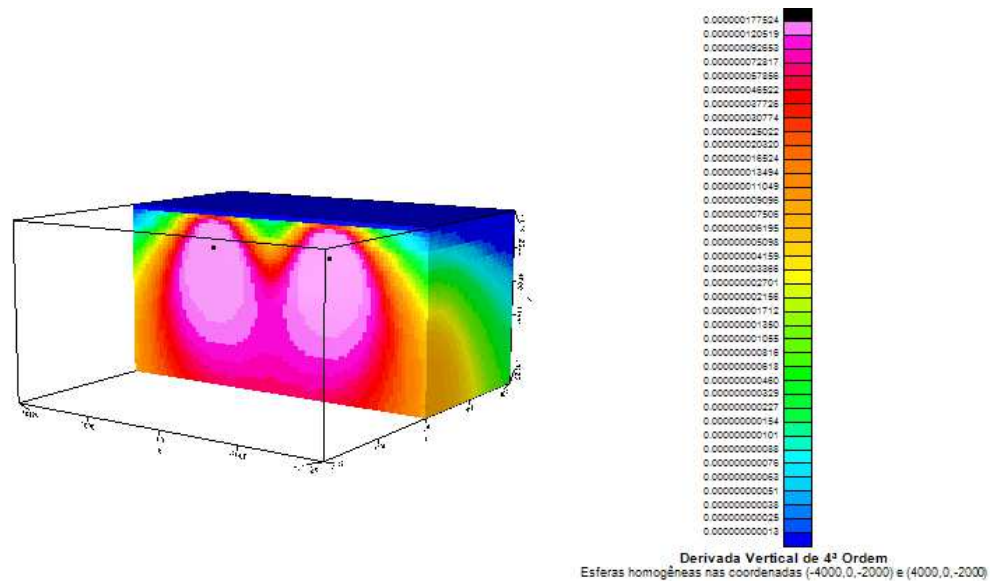


Figura 10: Derivada vertical de 4ª ordem do campo potencial gravitacional gerado por duas esferas homogêneas situadas nas profundidades $(-4000, 0, -2000)$ e $(4000, 0, -2000)$. Os pontos pretos correspondem aos valores máximos do campo escalado, representando as profundidades das esferas.

Além da configuração acima estabelecida, outros modelos foram elaborados, com diferentes distâncias horizontais de separação entre as esferas e em casos nos quais as esferas estão a profundidades diferentes entre si. Com base nos resultados das modelagens para as derivadas verticais analíticas, pode-se concluir que, quanto maior é a separação entre as esferas, menor é o efeito de interferência mútua entre elas. Em outras palavras, é mais fácil distinguir as duas esferas entre si e menor é a ordem da derivada vertical analítica necessária para fazer tal distinção. Por outro lado, para esferas próximas demais entre si, a distinção se torna muito complicada, mesmo para o cálculo das derivadas analíticas. Evidentemente, quanto maior a ordem da derivada, melhor é a resolução para distinguir as duas esferas. Tal fato vale para qualquer tipo de configuração adotada para a modelagem da derivada vertical analítica neste trabalho. Quando as esferas estão situadas a mesma profundidade, o método consegue determinar com precisão as profundidades de ambas as esferas, uma vez que só há um valor de máximo absoluto. Por outro lado, quando as esferas estão situadas a profundidades diferentes, o cálculo da profundidade de uma das esferas fica prejudicado.

5. OS EFEITOS DE BORDA

5.1 INTRODUÇÃO

Ao longo dos anos, inúmeros artigos técnicos, livros e seminários se dedicaram ao estudo do problema prático inerente à estimativa do espectro da energia de séries de caráter estacionário, amostradas e de banda limitada no domínio da distância (ou do tempo), onde a informações conhecidas a respeito das séries temporais são os valores de sua autocorrelação (Burg,1975).

Quase todo o conhecimento a respeito do tema é baseado no uso das funções-janela, também chamada de função pulso retangular, ou, ainda, função caixa, cujas propriedades podem ser facilmente analisadas a partir do estudo do teorema da convolução na transformada de Fourier. Entretanto, o uso de tais funções retangulares (janelas) produz estimativas espectrais negativas ou então que não estão de acordo com os valores da função de autocorrelação original. Essa foi uma das principais motivações para o desenvolvimento do método de extrapolação da Máxima Entropia de Predição (Burg,1975).

A aproximação convencional da função de autocorrelação no domínio da distância, denotada por $R(x)$, para $|x| \leq N$, onde x representa a distância e N o número de amostras, é assumir que a função de autocorrelação se anula para valores de distância além da razão de amostragem em função do número de amostras, isto é:

$$R(x) = 0 ; |t| > N \quad (21)$$

Então, calcula-se a transformada de Fourier de $W(x)R(x)$, onde $W(x)$ é a janela, concebida ainda como uma função de ponderação, ou função de truncamento. Tal cálculo é equivalente a obter a transformada de Fourier de $R(x)W(x)$, para $-\infty < t < +\infty$, onde $W(x) = 0$, para $|t| > N$. Pelo teorema da convolução, tal produto de funções no domínio da distância equivale à convolução destas funções no domínio do número de onda. Tal procedimento matemático é eficiente desde que o espectro de energia no domínio da distância seja igual ao espectro no domínio do número de onda, (que é o enunciado do Teorema de Parseval), o qual está sofrendo a operação de convolução com a transformada de Fourier da função de truncamento (Burg,1975).

Diversas pesquisas foram feitas a fim de se estudar as propriedades de tais funções de truncamento (janelas). A seleção de uma função de truncamento (janela) envolve o compromisso entre a resolução no espectro final e a extensão para a qual um componente de um espectro (número de onda ou frequência) contamina as estimativas de quaisquer outros componentes do espectro nas vizinhanças. Alternativamente, isto significa que temos de impor que o pico principal da transformada de Fourier função de truncamento seja um impulso e, como consequência, que os lóbulos laterais da sua transformada de Fourier sejam minimizados. Outra imposição é que as estimativas do espectro sejam estritamente positivas. A princípio, a função de truncamento teórica é satisfatória, exceto pelo fato de que problemas são artificialmente introduzidos quando

se estima que a função de autocorrelação se anula para um valor de distância determinado, isto é, para $R(x) = 0; |t| > N$ e pelo fato de sermos obrigados a truncar os dados originados pela função de truncamento, correspondente à janela no domínio do número de onda e vice-versa (Burg, 1975).

A computação prática de mapas transformados pode ser feita utilizando tanto a convolução no domínio do tempo (ou do espaço) quanto o produto no domínio da transformada de Fourier, entre o campo potencial e o operador (ou o filtro) que efetua a transformação desejada no mapa original. A multiplicação no domínio da frequência (ou do número de onda) é a mais usual, pois envolve uma operação matemática mais simples e rápida das transformadas de Fourier de dois mapas. Como já se sabe, o algoritmo da FFT torna tais cálculos rápidos. Contudo, algumas armadilhas são inerentes a este método. Geralmente, a área do levantamento não é retangular e pode conter lacunas. O cálculo da FFT, para tais configurações, não é muito fácil de ser conduzido com sucesso. Ademais, os dados originais precisam ser interpolados em uma malha de dados regular. Se a distância entre os pontos nos quais há medições e os nós das malhas de dados é muito grande, haverá distorções dos dados interpolados. Um método como a FFT propagará tais distorções para todo o mapa e, por exemplo, um artefato de interpolação que esteja situado na borda superior direita do mapa original poderá afetar a borda inferior esquerda do mapa transformado. Outro problema é o fato de que é impossível transformar somente um fragmento desejável do mapa inteiro (Gibert, D. e Galdeano, A., 1985).

As razões acima expostas fazem com que a equação da convolução seja muito utilizada, mesmo sendo um método mais lento do que a FFT, mas possuindo as vantagens de ser mais local e de ter menos propagação de distorções quando do processo de interpolação, além de ser bem preciso, possuindo uma boa resolução (Gibert, D. e Galdeano, A., 1985).

A magnitude dos coeficientes do filtro empregado na transformação do campo potencial, no cálculo da convolução, diminui rapidamente do centro para as bordas do mapa. Por causa disso, os efeitos de borda se tornam particularmente acentuados na 'periferia' dos mapas transformados, sendo necessário não introduzir altas frequências no processo de extrapolação dos dados. Uma boa extrapolação é feita se o espectro dos dados extrapolados não difere substancialmente do espectro dos dados originais. Existem vários métodos que efetuem a extrapolação, tais como a extrapolação polinomial, a simetrização, além da extrapolação com um filtro de predição (Gibert, D. e Galdeano, A., 1985).

Um bom exemplo de algoritmo que utiliza um filtro de predição é a Análise Espectral por Entropia Máxima, desenvolvido por Burg (1975). O principal problema quando se utiliza este método é selecionar uma razão entre o número de coeficientes do filtro de predição empregado na extrapolação e a taxa de amostragem, diretamente proporcional ao número de dados usados para efetuar o cálculo referido. Alguns

resultados empíricos mostram que tal razão deve variar entre 0,1 e 0,3, conforme explicado na figura 11 a seguir (Gibert,D. e Galdeano, A., 1985).

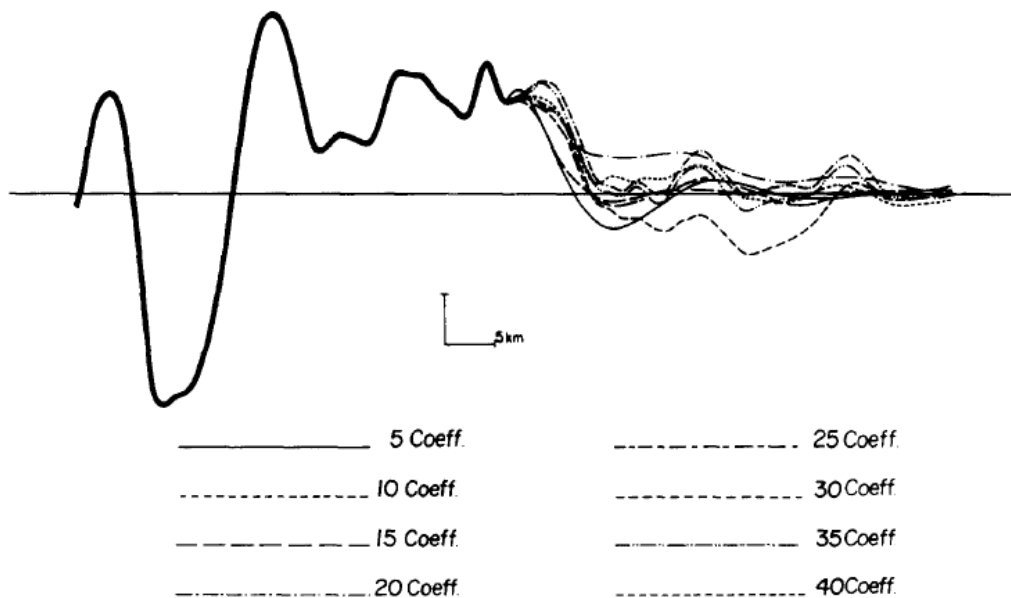


Figura 11: Ilustração do efeito do número de coeficientes empregados nos filtros de predição usados para extrapolar os dados originais dos campos potenciais com os dados gerados pelo processo de expansão da malha de dados, a fim de contornar os efeitos de borda. À medida que o número de coeficientes aumenta, a precisão do algoritmo de extrapolação melhora, o que permite reconstruir mais adequadamente o espectro de potência da anomalia original. Neste exemplo, a razão entre o número de coeficientes e o número de dados amostrados varia de 5 % até 40 %. Ilustração extraída de Gilbert e Galdeano (1985).

É sabido que os dados precisam ser interpolados em uma malha de dados regular de dimensões retangulares. Para o caso de levantamentos gravimétricos, a interpolação é uma tarefa árdua devido à distribuição irregular e heterogênea dos pontos onde há medições. Em tais situações, métodos de interpolação mais sofisticados, tais como a krigagem, podem ser empregados. Em geral, a interpolação deve ser feita em malhas de dados que sejam quadradas ou retangulares (Gibert,D. e Galdeano, A., 1985).

5.2 PREPARAÇÃO DE MAPAS NA FFT

A preparação de um mapa 2D de anomalias de campos potenciais segue alguns passos básicos:

1. Remoção das tendências de primeira ordem do mapa. Como o mapa pré-processado deve ser periódico, é importante remover as tendências de primeira ordem antes de se realizar a expansão e o preenchimento do mapa no qual os filtros no domínio de Fourier serão aplicados;
2. Expansão das dimensões do mapa pela adição de áreas de valores nulos nas bordas do mapa a fim de produzir um mapa de dimensões retangulares. A expansão é dada em termos percentuais;
3. Reposicionar todos os valores de *dummy* das bordas do mapa com os valores interpolados das partes válidas do mapa original. Em outras palavras, os valores das bordas do mapa que foi expandido são interpolados com os valores do mapa original. Quando do preenchimento dos mapas originais, faz-se uma reorganização dos valores de *dummy* do mapa expandido dentro de um mapa com os valores originais das anomalias interpolados com esses valores de *dummy*, iniciando com a interpolação de todas as áreas em branco do mapa original, reposicionando os valores de *dummy* oriundos da expansão do mapa original em cada linha do mapa de modo tal que todas as linhas do mapa 2D sejam periódicas, sendo que o mesmo procedimento é aplicado para todas as colunas do mapa 2D. Após isto, ocorre a medição dos resultados a partir do preenchimento das colunas e linhas do mapa original, utilizando métodos específicos, tais como a entropia máxima de predição, ponderação a partir do inverso da distância, dentre outros. Os filtros no domínio de Fourier alteram o espectro. Logo, os mapas nos quais os filtros serão aplicados são suscetíveis do fenômeno de Gibb's caso o preenchimento do mapa não seja feito de maneira adequada.

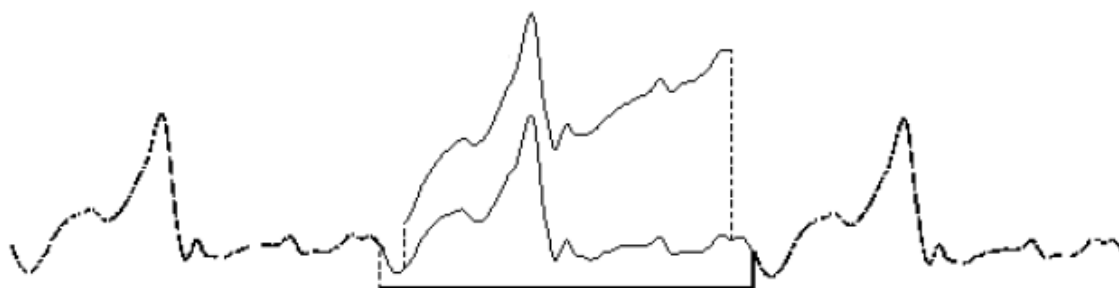


Figura 12: Processo de remoção de tendências de 1ª ordem da curva de anomalia do campo potencial gravitacional. Na curva superior (contínua), temos a anomalia original. Na curva inferior, temos a tendência de 1ª ordem removida, sendo que a mesma foi tornada periódica (curva tracejada) a fim de se poder efetuar corretamente o algoritmo da FFT, ajudando a contornar os efeitos de borda.

5.2.1 EXPANSÃO DOS MAPAS

O tamanho do mapa deve ser aumentado (expandido) a fim de que ele tenha dimensões aceitáveis para o algoritmo da FFT. A expansão proporciona uma área de extensão do mapa a fim de que ele possa ser suavemente periódico. A expansão, por si só, simplesmente preenche as bordas do mapa com valores em branco, que nada mais são do que valores sem nenhum atributo numérico definido.

5.3 EXTRAPOLAÇÃO: MÁXIMA ENTROPIA DE PREDIÇÃO

Após a expansão do mapa original, existe a etapa de preenchimento do mapa gerado a partir da expansão. Como descrito, os dados do mapa original serão extrapolados com os dados gerados quando do processo de expansão.

Interpolar (e extrapolar) é predizer (ou estimar) o valor da variável em estudo num ponto não amostrado. É um método que permite construir um novo conjunto de dados a partir de um conjunto discreto de dados pontuais conhecidos. Comumente em engenharia e na Geofísica, têm-se dados pontuais, obtidos a partir de uma amostragem.

Os métodos mais comuns de interpolação são: Vizinho mais Próximo, Vizinho Natural, Triangulação Linear, Triangulação de Delaunay, Polígonos de Voronoi, Inverso da Potência da Distância (sendo o IQD, o Inverso do Quadrado da Distância, o mais utilizado), Mínima Curvatura (*Spline*), Regressão Polinomial, Krigagem e Máxima Entropia Bayesiana.

O conceito de entropia foi introduzido na ciência há mais de um século por Boltzmann, tendo sido originado de estudos de termodinâmica, onde foi introduzido para caracterizar a desordem de um sistema. De uma maneira bem simplificada, o método da máxima entropia amostra os dados originais próximos das bordas dos mapas originais para determinar o seu conteúdo de espectro. O método então prediz, no mapa que sofreu o processo de expansão, uma função de dados que teriam a mesma assinatura espectral como os dados originais. Isto significa que, se os dados originais são suaves, os dados preditos serão suaves e, se os dados originais são ruidosos, os dados preditos são também ruidosos. Como resultado, os dados preditos não alterarão significativamente o espectro de energia que resultaria a partir dos dados originais isoladamente. Além disso, o método da entropia máxima permite que dados ruidosos em uma borda de um mapa sejam gradualmente interpolados para dados suavizados na margem oposta do mapa.

A entropia máxima é um método de estimativa do espectro da energia de séries estacionárias dependentes do tempo ou da distância a partir de um conhecimento parcial das suas funções de autocorrelação. Os métodos convencionais de estimativa do espectro da energia de uma função de autocorrelação assumem que a função de autocorrelação se anula para todos os pontos nos quais não há uma estimativa disponível e utiliza algum tratamento matemático para os pontos que possuem alguma

estimativa a fim de reduzir o efeito de truncamento da função de autocorrelação. Por outro lado, o método da entropia máxima não realiza nenhuma modificação nos pontos que possuem estimativas e usa uma estimativa diferente de zero para os pontos que não possuem uma estimativa prévia direta. O princípio particular usado pelo método da entropia máxima é de que a estimativa do espectro deve ser a mais randômica (ou aleatória) possível, ou, em outras palavras, ter uma entropia maximizada dentro de todos os espectros os quais sejam consistentes com os dados medidos. O resultado de tal metodologia é que é possível obter uma estimativa do espectro no domínio de Fourier com uma precisão e resolução muito maiores do que as obtidas pelos métodos de estimativa tradicionais, com um acréscimo de tempo de processamento proporcionalmente muito menor (Burg, 1975).

Talvez o trabalho mais importante a respeito da teoria da entropia máxima é a tese de doutorado escrita por Burg em 1975, na Universidade Stanford. Praticamente todo o aspecto teórico da entropia máxima neste trabalho foi pesquisado a partir desta tese acima citada.

Dados os conhecimentos específicos contidos em um conjunto limitado de valores da função de autocorrelação, somado ao fato de que os valores do espectro obtido são estritamente positivos, temos a questão de que existem inúmeros (para não dizer infinitos) espectros que se ajustam a tais propriedades. Desta maneira, sem informações adicionais, o processo de reconstruir o espectro original, ou, alternativamente, exibir todos os espectros disponíveis, pode se tornar algo praticamente impossível (Burg, 1975).

Uma alternativa razoável a este problema é encontrar uma função, chamada de função única ou função singular, denotada por $P(f)$, a qual seja representativa de todas as classes de espectros possíveis, isto é, que seja uma função que goze de todas as propriedades necessárias aos espectros em estudo, ou seja, não ter valores negativos e obedecer ao teorema da convolução no domínio do número de onda de maneira tal que o espectro original possa ser reconstruído a partir da convolução da função de truncamento com o espectro no domínio do número de onda. Contudo, a base para determinar tal função é bastante subjetiva. Apesar disso, uma escolha bem criteriosa da função $P(f)$ deve ser feita (Burg, 1975).

A análise espectral a partir máxima entropia consiste na escolha do espectro que corresponda à série temporal mais aleatória (randômica) cuja função de autocorrelação se ajuste aos valores conhecidos da série. Esta condição, a qual corresponde ao conceito da entropia máxima, sendo muito utilizado em Mecânica Estatística e na Teoria da Informação, é mostrada como sendo a melhor estimativa com respeito aos valores desconhecidos da função de autocorrelação (Burg, 1975).

Além de nos fornecer uma estimativa espectral a qual é uma função não negativa no domínio do número de onda e que se ajusta com os valores da função de autocorrelação, a análise espectral a partir da entropia máxima possui atributos, dentre os quais é o fato de que a análise espectral a partir da entropia máxima possui a melhor resolução em comparação às estimativas convencionais (Burg,1975).

Uma vez que a série temporal mais aleatória possível possui um espectro 'branco' (ou suave), é de esperar que a condição de entropia máxima produza um espectro o mais suave possível que seja consistente com os valores da função de autocorrelação. Os espectros originados a partir da entropia máxima quase sempre possuem uma curvatura do pico do espectro muito mais suave do que a obtida por outras metodologias, o que obviamente implica numa resolução muito melhor. Além disso, muitas vezes as estimativas espectrais convencionais não estão de acordo com os dados originais do domínio da distância (ou do tempo) e não podem ser restritas de maneira que sejam estritamente positivas (Burg, 1975).

Adicionalmente, os problemas dos lóbulos laterais da função de ponderação, que é a função cuja transformada de Fourier é a função de truncamento (pulso retangular ou janela) não ocorrem na estimativa espectral da entropia máxima. Deste modo, o problema de truncamento é resolvido e, com isso, picos do espectro no domínio do número de onda que estejam muito próximos entre si podem ser resolvidos, ou seja, diferenciados entre si, a partir do método de estimativa espectral pela entropia máxima. Outro importante atributo da entropia máxima é o fato de que os valores de estimativa do espectro no domínio do número de onda podem ser obtidos diretamente da função de autocorrelação, $R(x)$, no domínio da distância, para $|t| \leq N$ (Burg, 1975).

Uma formulação matemática básica do algoritmo de extrapolação da entropia máxima de predição é fornecida no apêndice I desta dissertação de mestrado.

6. MODELAGEM NUMÉRICA

6.1 INTRODUÇÃO

A análise de Fourier consiste em uma metodologia que transforma funções no domínio do tempo ou do espaço em funções no domínio da frequência, ou do número de onda, oferecendo importantes relações entre as anomalias de campos potenciais e as fontes geradoras de tais anomalias.

A análise de Fourier pode ser estudada a partir do ponto de vista de funções no domínio do espaço (ou da distância) no lugar de funções no domínio do tempo, permitindo, deste modo, estudar o comportamento de campos magnéticos e de gravidade medidos em uma determinada superfície (Brigham, 1988).

Se a função não é periódica, então a transformada de Fourier será uma função contínua dependente da frequência, isto é, será uma função representada pela soma das senóides de todas as frequências do espectro. A transformada de Fourier é então uma representação da função no domínio da frequência (Brigham, 1988).

Para os problemas os quais a transformada de Fourier contínua não seja eficaz, a transformada de Fourier discreta oferece um método seguro e eficiente de solução. De um modo simplificado, obtemos a seguinte equação quando fazemos a integração numérica da transformada de Fourier contínua:

$$F(k) = \sum_{i=0}^{N-1} f(t) e^{-ik_l x_i} (x_{i+1} - x_i) ; l = 0, 1, \dots, N - 1 \quad (22)$$

Neste caso, consideram-se N pontos consistindo de dados amostrados e se nós queremos determinar separadamente a amplitude das N senóides, então o tempo de processamento é proporcional a N^2 , ou seja, ao número de multiplicações. Mesmo com computadores com processadores mais potentes, o tempo de processamento da transformada de Fourier discreta exige um uso de máquina muito alto para um elevado número de amostras (Birgham, 1988).

Como consequência do desenvolvimento das técnicas para reduzir o tempo de processamento da transformada de Fourier discreta em 1965 Cooley e Tukey publicou o seu algoritmo matemático, o qual recebe o nome de transformada rápida de Fourier ou FFT, na sigla em inglês. A FFT é um algoritmo computacional que reduz o tempo de processamento da transformada discreta de Fourier a um tempo proporcional a $N \log_2 N$. A FFT revolucionou o uso da transformada discreta de Fourier. É importante salientar, no entanto, que a habilidade de utilizar plenamente a FFT depende de um bom entendimento da teoria da transformada discreta de Fourier (Brigham, 1988).

As transformações no domínio de Fourier constituem uma classe de métodos que visam facilitar a interpretação geológica a partir da transformação de dados medidos em levantamentos geofísicos de campo em novas formas, mais fáceis e intuitivas de se trabalhar. Estas transformações, em geral, não definem diretamente a distribuição de fontes, mas oferecem um subterfúgio que ajuda a construir um entendimento mais geral

a respeito da natureza das fontes geradoras de anomalias de campos potenciais (Gilbert e Galdeano, 1985).

Em outras palavras, temos que a interpretação de dados gravimétricos é mais fácil quando se dispõem de mapas transformados. O objetivo de tais mapas é mostrar mais claramente os detalhes que não aparecem no mapa inicial (original). Por exemplo, a derivada vertical separa as anomalias individuais associadas a estruturas geológicas muito próximas entre si. A continuação para cima, por sua vez, é um método que transforma anomalias medidas em uma dada superfície em anomalias tais quais seriam medidas em outro nível (altitude) da superfície em questão. O processo de continuação para cima tende a atenuar as anomalias causadas por fontes rasas em comparação às fontes localizadas em profundidades maiores (Gilbert e Galdeano, 1985).

6.2 CAMPOS ESCALADOS NUMÉRICOS E O EFEITO DE BORDA

Na prática, trabalhamos com as técnicas da transformada de Fourier discreta, conforme foi abordado no tópico anterior. Isso significa que não dispomos de dados contínuos, mas somente de amostras de dados. Em outras palavras, os dados são ditos discretos ou discretos. Fontes situadas a profundidades muito grandes possuem uma amplitude muito 'fraca' para que possam ser adequadamente modeladas seguindo as técnicas disponíveis na transformada de Fourier discreta, razão pela qual se optou por trabalhar com a modelagem numérica de uma esfera homogênea a 2 km de profundidade, cujo raio vale 500 m e densidade $3000 \text{ kg}/\text{m}^3$, com um intervalo de amostragem de 50 m nas direções dos eixos x e y e o eixo z , o qual representa as profundidades, com módulo crescente para baixo e com profundidades negativas para baixo. Uma situação que resulta no mesmo efeito obtido para fontes muito profundas é aquela na qual se efetua a continuação para cima a um nível muito distante daquele no qual o centro de massa da esfera está posicionado.

Inicialmente, a esfera está posicionada de maneira simétrica em relação às bordas do mapa, ou seja, o seu centro de massa está equidistante dos vértices da malha de dados. A fim de se poder avaliar o efeito de borda, que ocorre principalmente quando as anomalias de interesse não estão simétricas em relação às bordas das malhas, deslocou-se a esfera de 2 km e 4 km em relação ao centro da malha de dados. É verificado que, nessas situações, a determinação correta da profundidade da esfera é prejudicada caso não se aplique uma expansão adequada da malha de dados e não se extrapole a área expandida com os dados prévios com um algoritmo adequado.

Foram elaborados, no *software* **Oasis montaj**, perfis das anomalias geradas pela esfera homogênea no caso em que o campo escalado foi calculado analiticamente para vários níveis e na situação na qual o campo escalado foi calculado numericamente em vários níveis, usando para tal a operação da continuação para cima no domínio da transformada de Fourier, na extensão **MAGMAP** do *software* **Oasis montaj**. No caso da continuação para cima numérica, calculada no **MAGMAP**, o campo de gravidade

original foi continuado numericamente para cada nível a partir do nível de 0 km do campo de gravidade original e então, a partir do campo de gravidade continuado numericamente, foi calculado o campo escalado para cada nível de continuação. O termo "campo escalado numérico" é aplicado quando se usam as técnicas da transformada de Fourier para calculá-lo. O termo "derivadas verticais numéricas" tem sentido análogo ao termo "campo escalado numérico".

As figuras de 13 até 16 a seguir ilustram os perfis gerados para os campos escalados calculados analiticamente e numericamente, para o caso de uma esfera homogênea simétrica em relação às bordas da malha de dados:

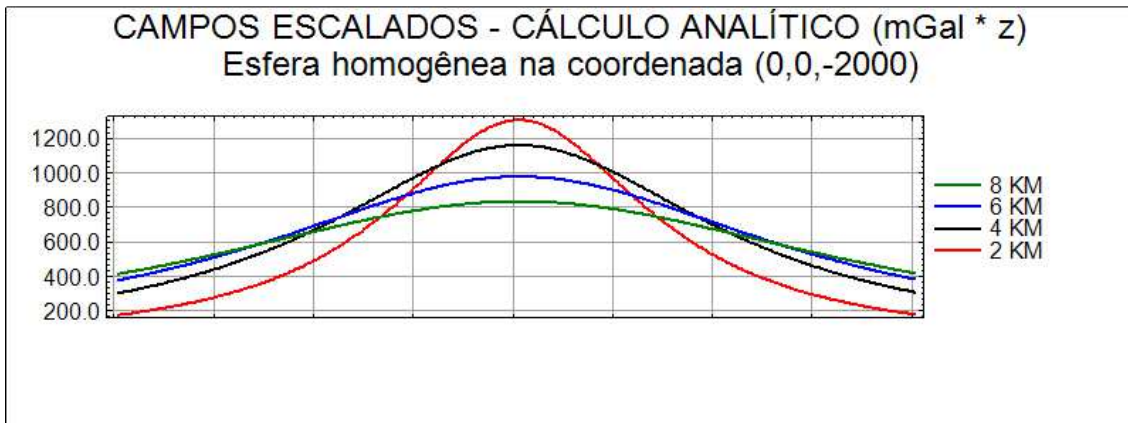


Figura 13: Perfil do campo escalado calculado analiticamente gerado por uma esfera homogênea situada na coordenadas cartesianas (0, 0, -2000).

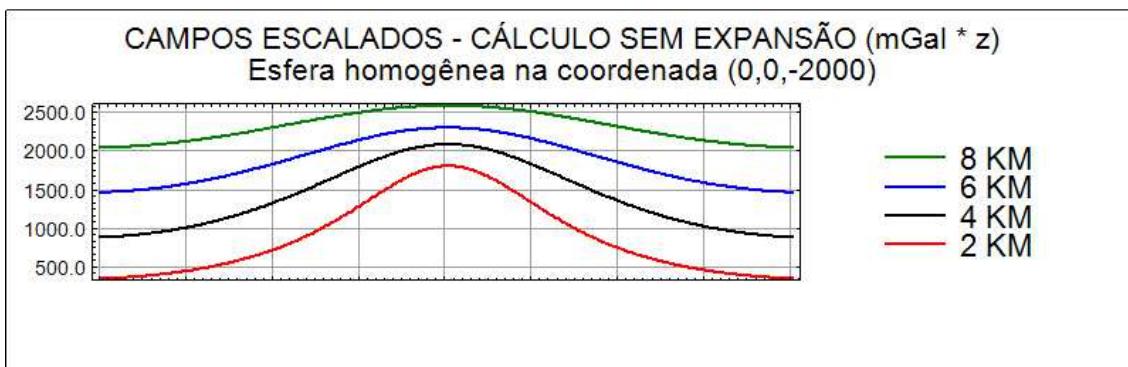


Figura 14: Perfil do campo escalado calculado no domínio da transformada de Fourier sem expansão. Campo gerado por uma esfera homogênea situada nas coordenadas cartesianas (0, 0, -2000).

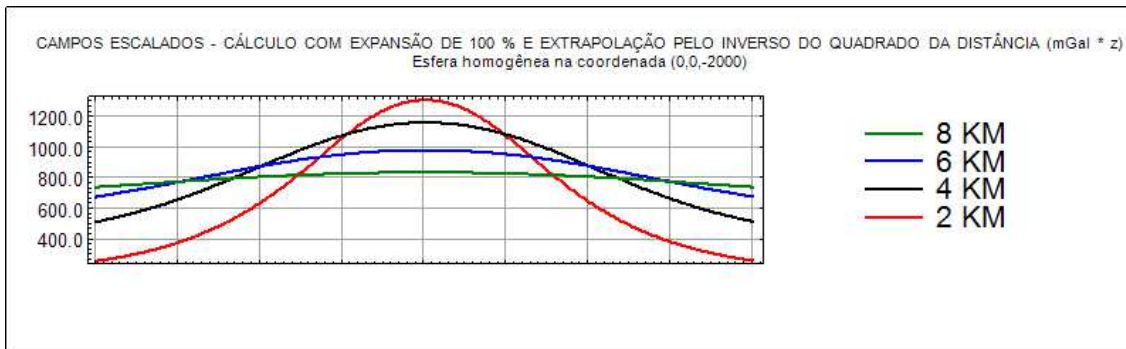


Figura 15: Perfil do campo escalado calculado no domínio da transformada de Fourier com expansão de 100 % e algoritmo de expansão do inverso do quadrado da distância. Campo gerado por uma esfera homogênea situada nas coordenadas cartesianas (0, 0, -2000).

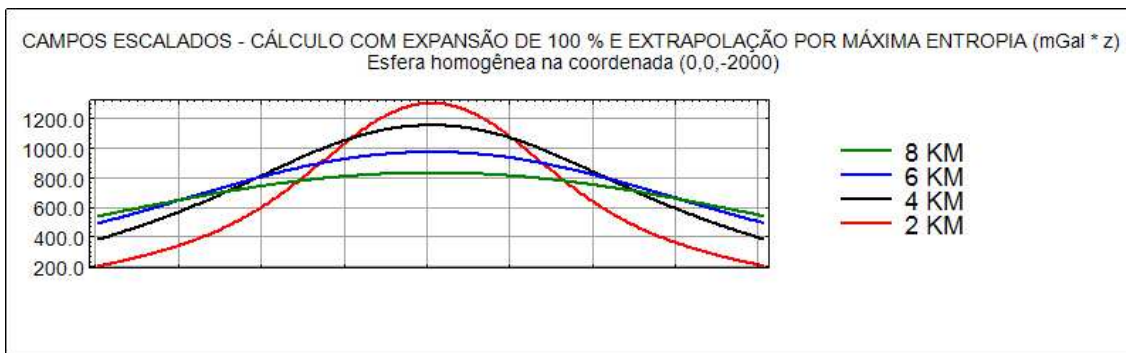


Figura 16: Perfil do campo escalado calculado no domínio da transformada de Fourier com expansão de 100 % e algoritmo de expansão da entropia máxima de predição. Campo gerado por uma esfera situada nas coordenadas cartesianas (0, 0, -2000).

No caso dos campos escalados obtidos numericamente, foram testadas três situações: i) campo escalado calculado sem expansão; ii) campo escalado obtido usando expansão de 100 % e o algoritmo de expansão do inverso do quadrado da distância e iii) campo escalado determinado com expansão de 100 % e algoritmo de extrapolação da máxima entropia de predição. Em todos os casos, o campo de gravidade foi continuado numericamente para os níveis de 2 km, 4 km, 6 km e 8 km e então o campo escalado foi obtido para cada nível de continuação.

Observou-se que o campo escalado calculado analiticamente possui uma amplitude máxima para o nível de 2 km (curva vermelha), que é o nível de continuação que corresponde à profundidade do centro de massa da esfera. Portanto, no caso do cálculo analítico do campo escalado, a profundidade do centro de massa da esfera foi calculada corretamente.

No caso do campo escalado calculado numericamente, a profundidade do centro de massa da esfera não foi corretamente determinada no caso em que não se aplicou expansão da malha de dados nem algoritmo de extrapolação de dados. Nesse caso, o valor máximo do campo escalado foi atribuído erroneamente ao nível de continuação de 8 km (curva verde), nível que é o mais distante daquele que corresponde à profundidade

real da fonte, que é de 2 km (curva vermelha). Portanto, a falta de um pré-processamento adequado da malha de dados, com as etapas de expansão, preenchimento e extrapolação, resultou na determinação de uma profundidade de 8 km quando, na verdade a profundidade real da esfera é de 2 km. Daí decorre a importância de efetuar corretamente tais etapas.

No caso do cálculo do campo escalado numérico em que foi aplicada uma expansão de 100 %, foram usados dois métodos de extrapolação: o inverso do quadrado da distância e a máxima entropia de predição. Ambos os métodos indicaram um valor máximo do campo escalado numérico para o nível de continuação de 2 km, correspondente à profundidade real da esfera. Portanto, quando se aplica adequadamente uma expansão na malha de dados e se utiliza de um bom algoritmo de extrapolação, a profundidade é determinada corretamente. Neste caso, no qual a anomalia é simétrica em relação às bordas do mapa, os métodos de extrapolação não possuem uma diferença significativa de precisão e resolução. Entretanto, será demonstrado adiante que, para casos nos quais a anomalia está deslocada substancialmente do centro do mapa, a entropia máxima de predição revela-se um método de extrapolação mais eficaz, principalmente no que concerne a níveis de continuação muito distantes do nível de continuação que representa a profundidade real da esfera.

Com o intuito de obter uma representação mais detalhada do campo escalado numérico para a anomalia simétrica em relação às bordas, efetuou-se uma continuação numérica para níveis mais próximos do nível de continuação que corresponde ao valor máximo absoluto do campo escalado e, portanto, à profundidade real da esfera. Tais níveis são, a saber: 1000 m, 1500 m, 2000 m, 2500 m e 3000 m. As figuras correspondentes (figuras 17 até 23) estão expostas a seguir e os resultados qualitativos são similares aos que foram descritos no parágrafo anterior: o cálculo analítico oferece a profundidade corretamente, enquanto que o cálculo do campo escalado numérico sem expansão sempre atribui o valor máximo do campo escalado ao nível de continuação maior, que no caso é o mais distante do nível referente à profundidade real da esfera. O resultado é, novamente, um valor incorreto de profundidade. Quanto à expansão de 100 % para o cálculo numérico do campo escalado e o uso dos algoritmos de extrapolação do inverso do quadrado da distância e da máxima entropia de predição, o panorama não se altera, ou seja, a profundidade da esfera é corretamente determinada, com o máximo absoluto do campo escalado correspondendo ao nível de continuação de 2 km.

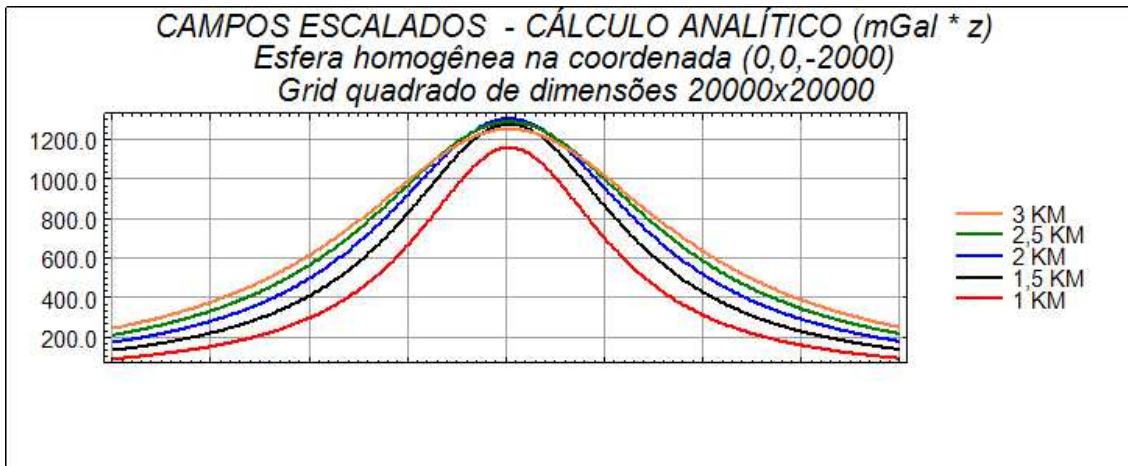


Figura 17: Perfil do campo potencial gravitacional escalado calculado analiticamente. Campo gerado por uma esfera homogênea situada nas coordenadas cartesianas (0, 0,-2000). A malha de dados possui dimensões quadradas de 20 km comprimento por 20 km de largura. Os níveis de continuação para cima adotados foram de 1 km, 1.5 km, 2 km, 2.5 km e 3 km.

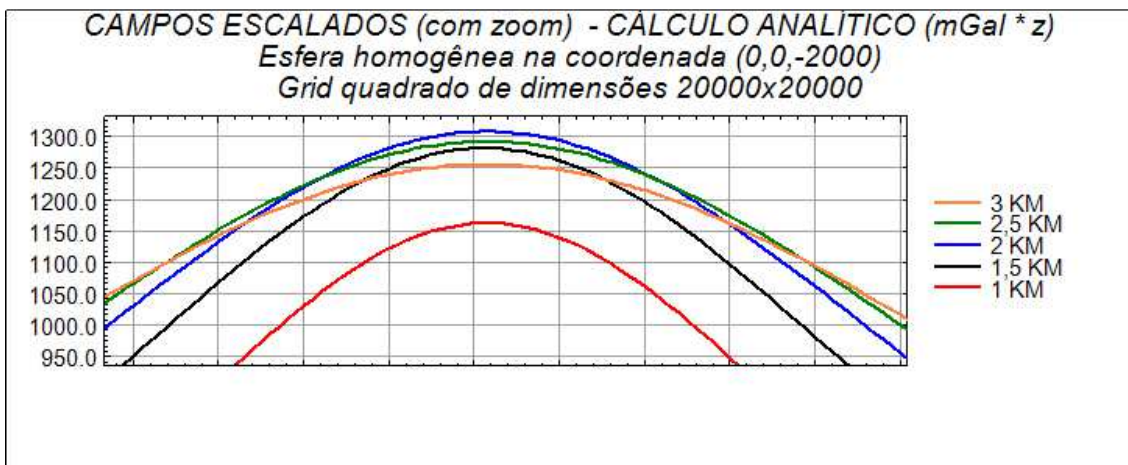


Figura 18: Perfil do campo potencial gravitacional calculado analiticamente com *zoom* para uma melhor visualização. Campo gerado por uma esfera homogênea situada nas coordenadas cartesianas (0, 0,-2000). A malha de dados possui dimensões quadradas de 20 km de comprimento por 20 km de largura. Os níveis de continuação para cima adotados foram de 1 km, 1.5 km, 2 km, 2.5 km e 3 km.

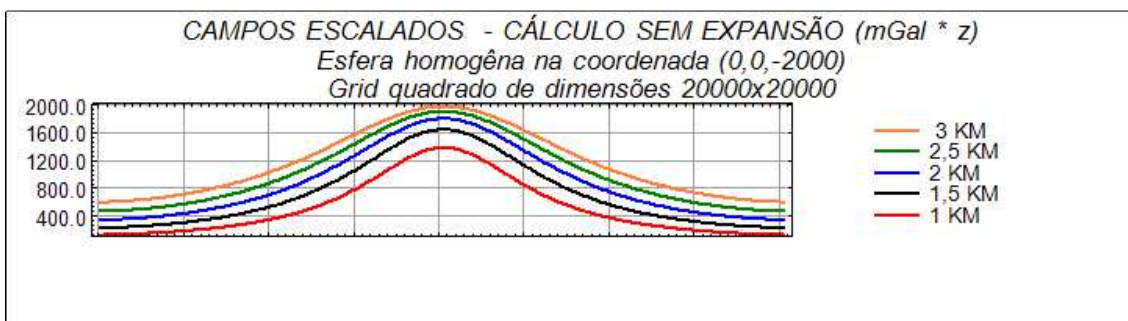


Figura 19: Perfil do campo potencial gravitacional calculado no domínio da transformada de Fourier sem expansão. Campo gerado por uma esfera homogênea situada nas coordenadas cartesianas (0, 0,-2000). A malha de dados possui dimensões quadradas de 20 km de comprimento por 20 km de largura. Os níveis de continuação para cima adotados foram de 1 km, 1.5 km, 2 km, 2.5 km e 3 km.

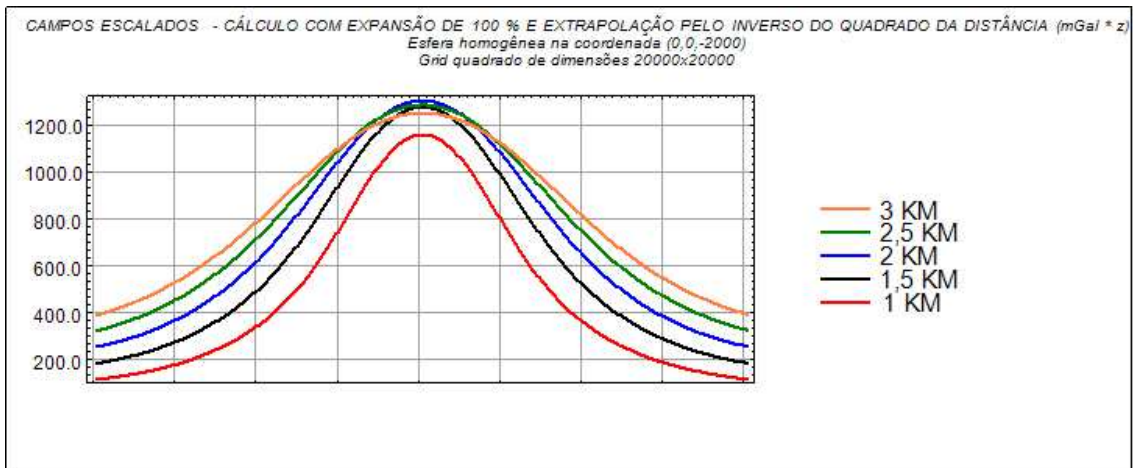


Figura 20: Perfil do campo potencial gravitacional calculado no domínio da transformada de Fourier com expansão de 100 % e algoritmo de extrapolação do inverso do quadrado da distância. Campo gerado por uma esfera homogênea situada nas coordenadas cartesianas (0, 0,-2000). A malha de dados possui dimensões quadradas de 20 km de comprimento por 20 km de largura. Os níveis de continuação para cima adotados foram de 1 km, 1.5 km, 2 km, 2.5 km e 3 km.

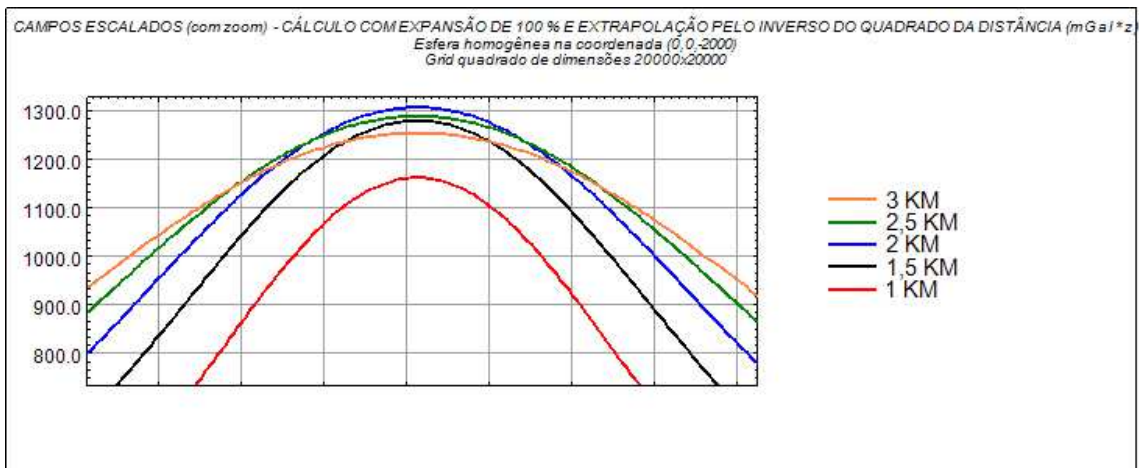


Figura 21: Perfil do campo potencial gravitacional (com zoom, para melhor visualização) calculado no domínio da transformada de Fourier com expansão de 100 % e algoritmo de extrapolação do inverso do quadrado da distância. Campo gerado por uma esfera homogênea situada nas coordenadas cartesianas (0,0,-2000). A malha de dados possui dimensões quadradas de 20 km de comprimento por 20 km de largura. Os níveis de continuação para cima adotados foram de 1 km, 1.5 km, 2 km, 2.5 km e 3 km.

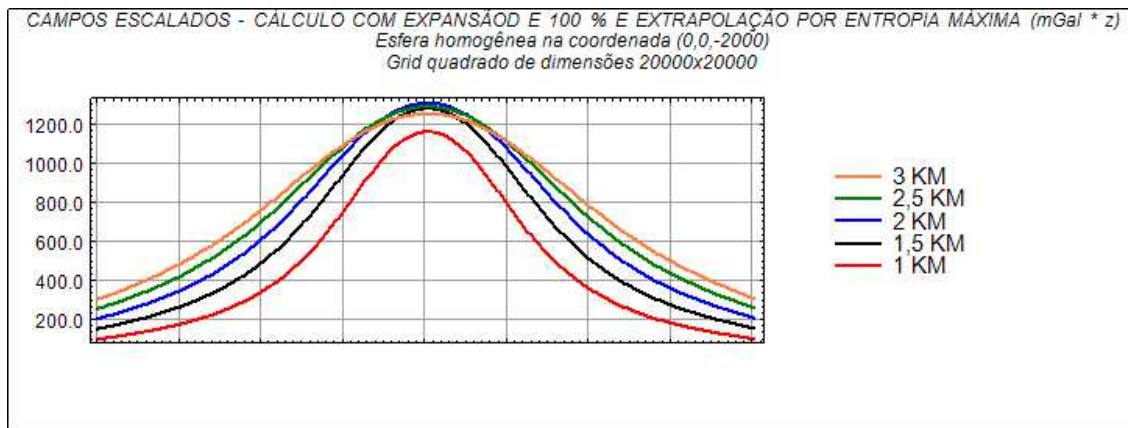


Figura 22: Perfil do campo potencial gravitacional calculado no domínio da transformada de Fourier com expansão de 100 % e algoritmo de extrapolação da entropia máxima de predição. Campo gerado por uma esfera homogênea situada nas coordenadas cartesianas (0, 0, -2000). A malha de dados possui dimensões quadradas de 20 km de comprimento por 20 km de largura. Os níveis de continuação para cima adotados foram de 1 km, 1.5 km, 2 km, 2.5 km e 3 km.



Figura 23: Perfil do campo potencial gravitacional (com zoom, para melhor visualização) calculado no domínio da transformada de Fourier com expansão de 100 % e algoritmo de extrapolação da entropia máxima de predição. Campo gerado por uma esfera homogênea situada nas coordenadas cartesianas (0, 0, -2000). A malha de dados possui dimensões quadradas de 20 km de comprimento por 20 km de largura. Os níveis de continuação para cima adotados foram de 1 km, 1.5 km, 2 km, 2.5 km e 3 km.

A seguir, a esfera foi deslocada de 2 km em relação ao centro da anomalia, não estando, portanto, mais simétrica em relação às bordas do mapa. Nesse caso, o cálculo analítico do campo escalado continua a determinar corretamente a profundidade da esfera, uma vez que o máximo absoluto do campo escalado foi obtido na curva referente ao nível de continuação de 2 km, que é a profundidade da esfera (Figura 24).

Quanto ao cálculo numérico do campo escalado, o cálculo sem expansão resulta no mesmo problema de se obter o valor máximo do campo escalado numérico para o nível de continuação mais distante do nível de continuação correspondente à profundidade da esfera, resultando numa estimativa errônea da mesma (Figura 25).

Quando se aplica um percentual de expansão de 110 % e os algoritmos de extrapolação, a profundidade é determinada corretamente. Novamente, o método da entropia máxima de predição revelou-se mais preciso do que o inverso do quadrado da distância, principalmente no que diz respeito à continuidade lateral das curvas representativas das anomalias para os diversos níveis de continuação. Tal fato é evidenciado nas figuras 26 e 27.

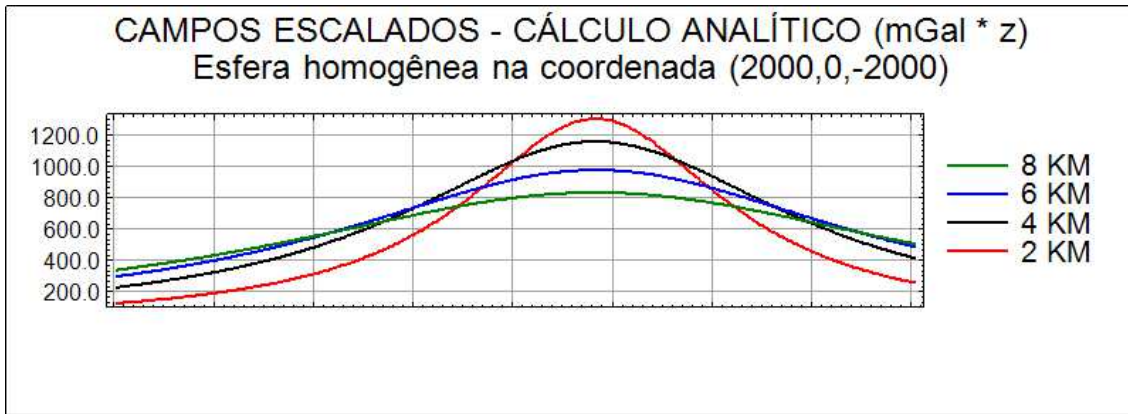


Figura 24: Perfil do campo potencial gravitacional calculado analiticamente. Campo gerado por uma esfera homogênea situada nas coordenadas cartesianas (2000, 0,-2000).

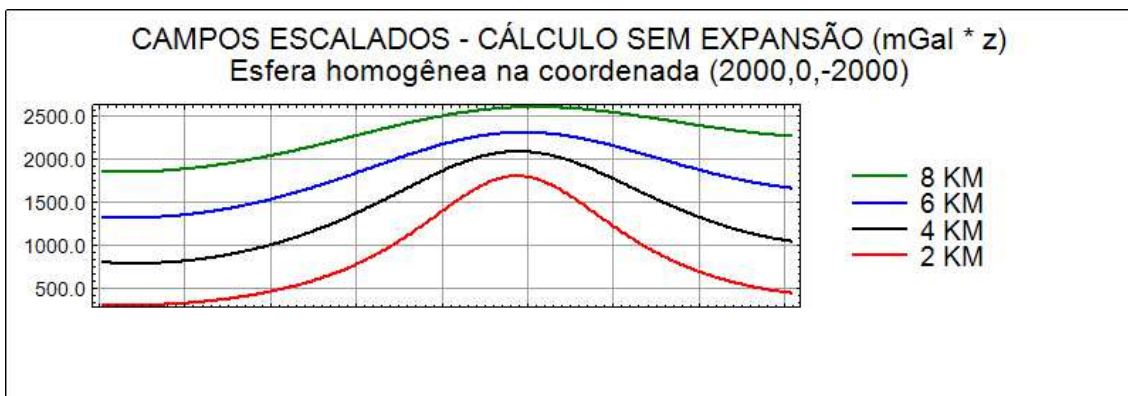


Figura 25: Perfil do campo potencial gravitacional calculado no domínio da transformada de Fourier sem expansão. Campo gerado por uma esfera homogênea situada nas coordenadas cartesianas (2000, 0,-2000).



Figura 26: Perfil do campo potencial gravitacional calculado no domínio da transformada de Fourier com expansão de 100 % e extrapolação pelo inverso do quadrado da distância. Campo gerado por uma esfera homogênea situada nas coordenadas cartesianas (2000, 0,-2000).

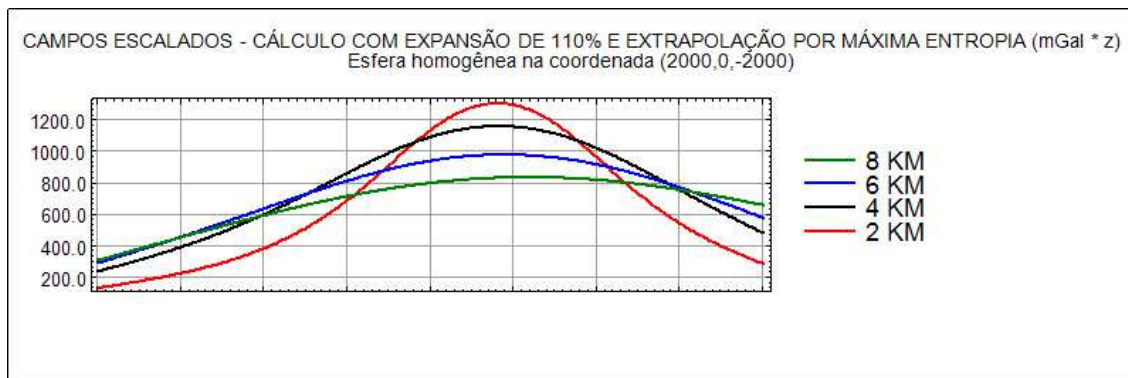


Figura 27: Perfil do campo potencial gravitacional calculado no domínio da transformada de Fourier com expansão de 100 % e extrapolação pela entropia máxima de predição. Campo gerado por uma esfera homogênea situada nas coordenadas cartesianas (2000, 0,-2000).

Uma das vantagens da operação da continuação para cima é a possibilidade de economizar os custos de levantamentos aéreos, uma vez que é possível calcular o valor do campo de gravidade e dos campos escalados para várias altitudes de medição, dispensando o uso de uma aeronave equipada de um gravímetro para realizar tal procedimento. Contudo, quando a anomalia de interesse é assimétrica em relação às bordas da área do levantamento, o efeito de borda se torna mais proeminente e a continuidade lateral da anomalia tem a sua resolução prejudicada, com tal efeito se acentuando para corpos mais profundos, ou seja, associados a comprimentos de onda maiores no espectro da transformada de Fourier. Nem sempre o fluxo de processamento consistindo da expansão da malha de dados e da aplicação de um algoritmo de extrapolação é suficiente para contornar tais problemas. Então, testou-se a expansão das dimensões da malha de dados no próprio algoritmo elaborado no MATLAB. Como a esfera foi deslocada de 2 km em relação ao centro da malha de dados, a malha original, que tinha dimensões quadradas de 20000 m x 20000 m foi convertida em uma malha de dimensões retangulares de 24000 m x 20000 m, a fim de 'forçar' com que a anomalia ficasse novamente centrada, ou seja, simétrica em relação às bordas da malha de dados. Esse 'truque' pode ser útil quando já se tem uma noção prévia da posição da anomalia na área de levantamento, mas ainda não se sabe a sua profundidade exata. Adicionalmente, o campo escalado numérico foi calculado para níveis de continuação mais próximos do nível de continuação correspondente à profundidade da esfera. Tais níveis aplicados foram, a saber: 1000 m, 1500 m, 2000 m, 2500 m e 3000 m. A expansão adotada para a utilização posterior dos algoritmos de extrapolação (inverso do quadrado da distância e entropia máxima de predição) foi de 100 %. A conjugação das duas operações acima descritas minimizou o efeito da continuidade lateral da anomalia (Figura 28). Porém, quando não se aplica nenhuma expansão, a profundidade continua a ser determinada de maneira errônea, pois o máximo absoluto do campo escalado numérico, nessas circunstâncias, continua a ser referente ao nível de continuação mais distante daquele que corresponde à profundidade da esfera (Figura 29). Quando se aplica a expansão de 100 % e usando os algoritmos de extrapolação do inverso do quadrado da distância e da máxima entropia de predição, o valor da profundidade é calculado corretamente, com

ambos os métodos de extrapolação apresentando uma resolução similar quanto à extensão lateral da anomalia (Figuras 30 e 31).

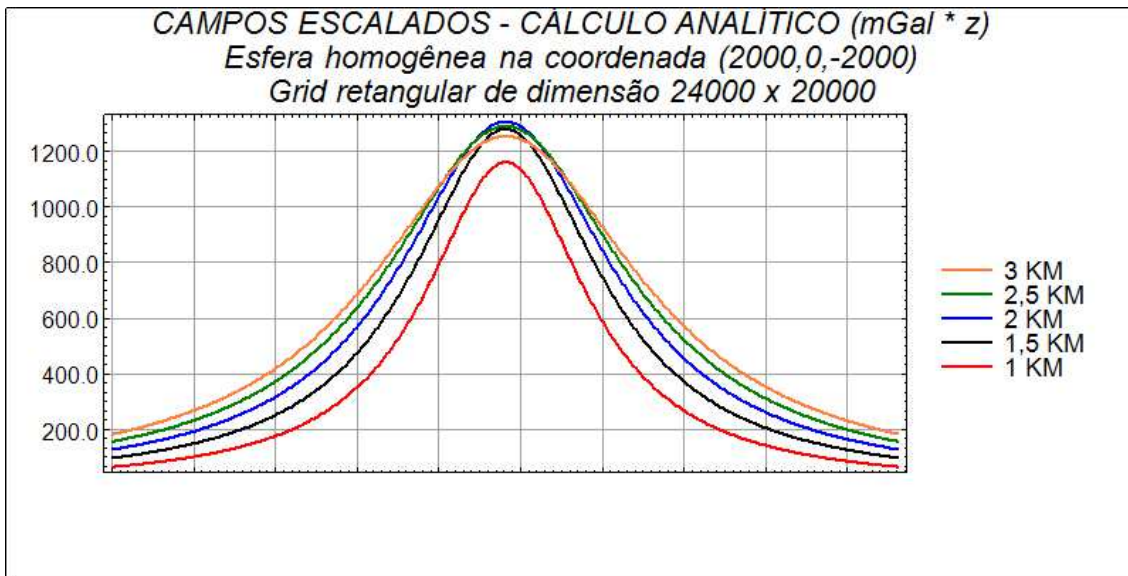


Figura 28: Perfil do campo potencial gravitacional calculado analiticamente. Campo gerado por uma esfera homogênea situada nas coordenadas cartesianas (2000, 0,-2000). A malha de dados possui dimensões retangulares de 24 km de comprimento por 20 km de largura. Os níveis de continuação para cima adotados foram de 1 km, 1.5 km, 2 km, 2.5 km e 3 km.

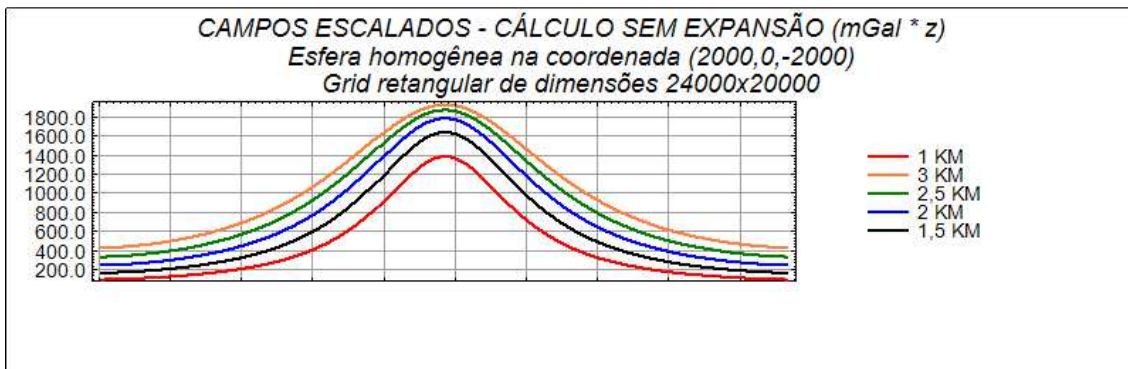


Figura 29: Perfil do campo potencial gravitacional calculado no domínio da transformada de Fourier sem expansão. Campo gerado por uma esfera homogênea situada nas coordenadas cartesianas (2000, 0,-2000). A malha de dados possui dimensões retangulares de 24 km de comprimento por 20 km de largura. Os níveis de continuação para cima adotados foram de 1 km, 1.5 km, 2 km, 2.5 km e 3 km.

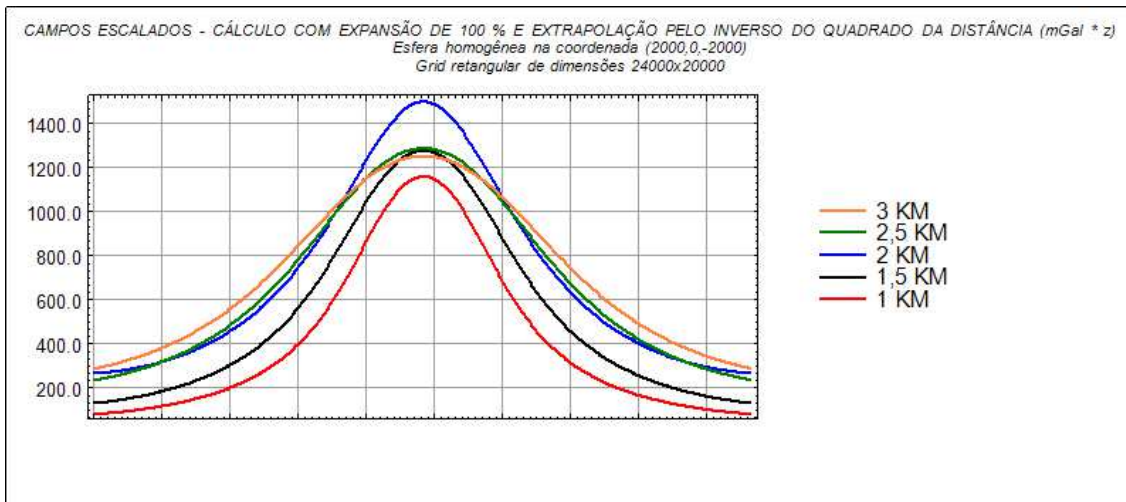


Figura 30: Perfil do campo potencial gravitacional calculado no domínio da transformada de Fourier com expansão de 100 % e extrapolação pelo inverso do quadrado da distância. Campo gerado por uma esfera homogênea situada nas coordenadas cartesianas (2000, 0, -2000). A malha de dados possui dimensões retangulares de 24 km de comprimento por 20 km de largura. Os níveis de continuação para cima adotados foram de 1 km, 1.5 km, 2 km, 2.5 km e 3 km.

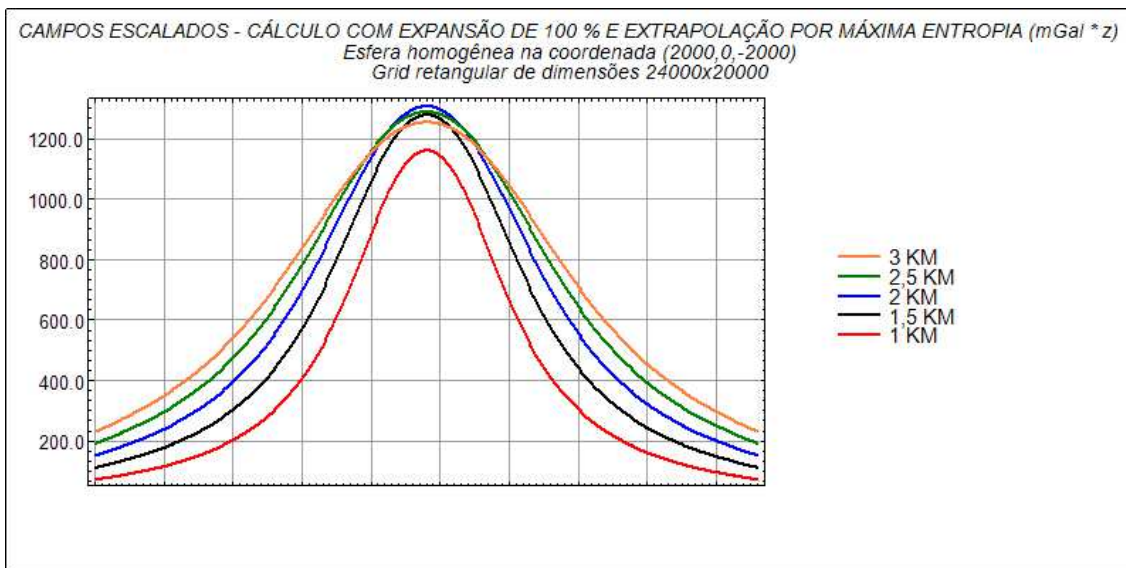


Figura 31: Perfil do campo potencial gravitacional calculado no domínio da transformada de Fourier com expansão de 100 % e extrapolação pela entropia máxima de predição. Campo gerado por uma esfera homogênea situada nas coordenadas cartesianas (2000, 0, -2000). A malha de dados possui dimensões retangulares de 24 km de comprimento por 20 km de largura. Os níveis de continuação para cima adotados foram de 1 km, 1.5 km, 2 km, 2.5 km e 3 km.

Quando se desloca a anomalia de 4 km em relação ao centro da malha de dados (Figuras 32, 33, 34 e 35), observa-se que o método de extrapolação da máxima entropia de predição obteve uma grande vantagem em comparação com o inverso do quadrado da distância (Figuras 34 e 35), principalmente no que diz respeito à extensão lateral da anomalia. A questão da extensão lateral da anomalia tem uma importância muito grande quando a anomalia é muito deslocada em relação ao centro da malha de dados. No caso do inverso do quadrado da distância (Figura 34), a má resolução da extensão lateral da

anomalia faz com que as curvas do campo escalado referentes aos níveis de continuação mais distantes do nível correspondente à profundidade da esfera apresentem valores do campo escalado maiores, no lado no qual a anomalia foi deslocada, do que o máximo absoluto referente à curva do campo escalado numérico para o nível de 2 km, caracterizando o efeito de borda mesmo com a aplicação das etapas de expansão e extrapolação na malha de dados. Para o método de extrapolação da entropia máxima de predição (Figura 35), este problema não ocorreu, embora a resolução lateral estivesse um pouco prejudicada. Nesta situação da anomalia deslocada de 4 km em relação ao centro da malha de dados, o percentual de expansão aplicado foi de 120%. O campo escalado numérico calculado sem expansão novamente não produziu um cálculo fidedigno da profundidade da esfera, resultando na mesma situação descrita nos casos anteriores (Figura 33).

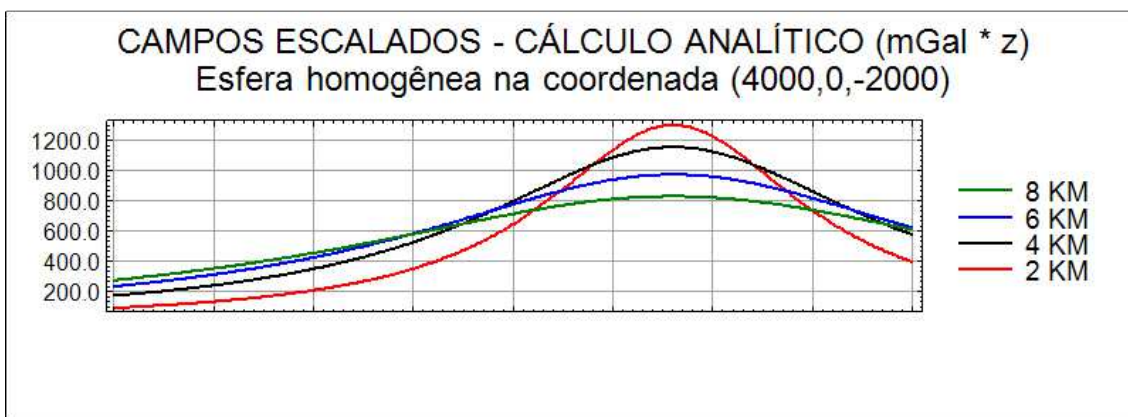


Figura 32: Perfil do campo potencial gravitacional calculado analiticamente. Campo gerado por uma esfera homogênea situada nas coordenadas cartesianas (4000, 0, -2000).

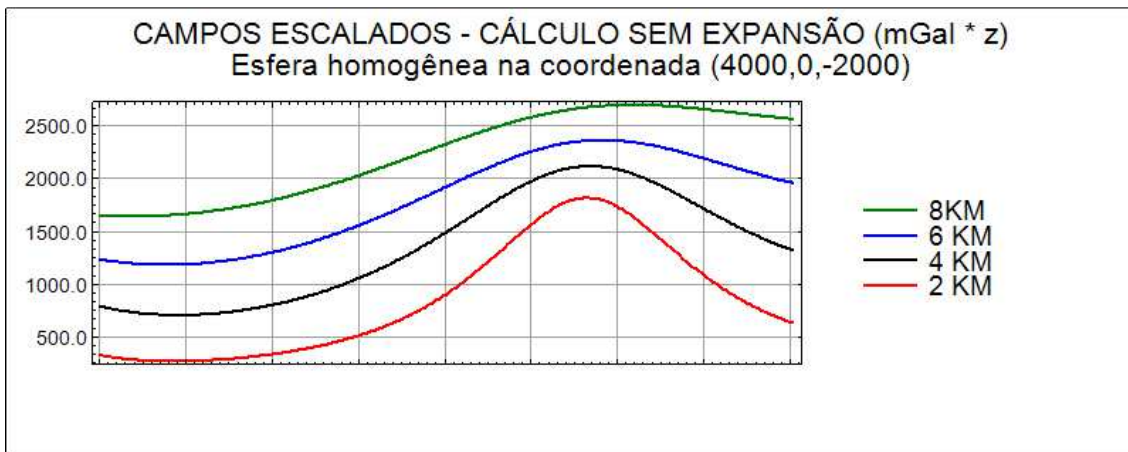


Figura 33: Perfil do campo potencial gravitacional calculado no domínio da transformada de Fourier sem expansão. Campo gerado por uma esfera homogênea situada nas coordenadas cartesianas (4000, 0, -2000).

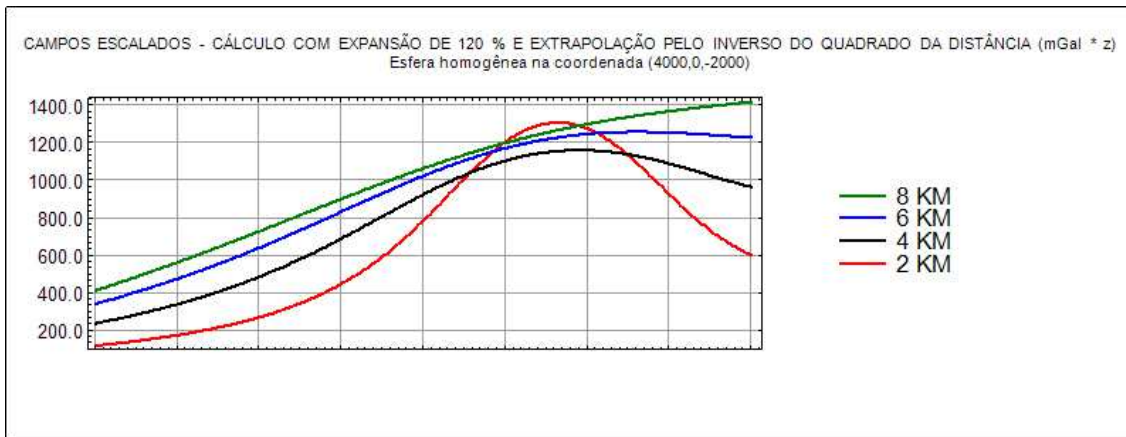


Figura 34: Perfil do campo potencial gravitacional calculado no domínio da transformada de Fourier com expansão de 100 % e extrapolação pelo inverso do quadrado da distância. Campo gerado por uma esfera homogênea situada nas coordenadas cartesianas (4000, 0,-2000).

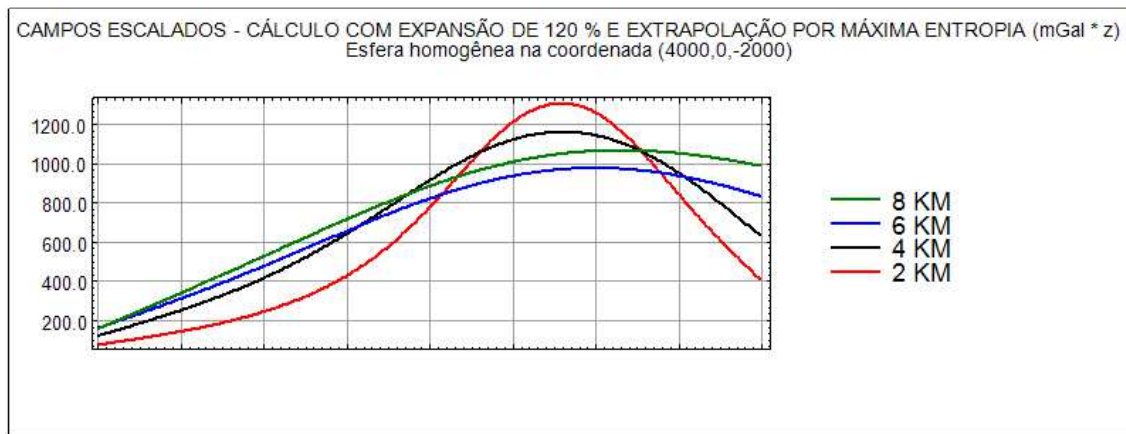


Figura 35: Perfil do campo potencial gravitacional calculado no domínio da transformada de Fourier com expansão de 100 % e extrapolação pela entropia máxima de predição. Campo gerado por uma esfera homogênea situada nas coordenadas cartesianas (4000, 0,-2000).

Os mesmos procedimentos de calcular numericamente os campos escalados para níveis mais próximos daquele correspondente à profundidade da esfera e de ampliar a malha de dados foi aplicado para o caso da anomalia deslocada de 4 km em relação ao centro da malha de dados. Neste caso, os novos níveis foram de 1000 m, 1500 m, 2000 m, 2500 m e 3000 m, e a malha de dados, que era quadrada de dimensões 20000 m x 20000 m, tornou-se retangular com dimensões de 28000 m x 20000 m, sendo aplicada uma expansão de 100 % para o uso dos algoritmos de extrapolação (inverso do quadrado da distância e entropia máxima de predição). As figuras 36 até 41 seguintes explicitam tais procedimentos:

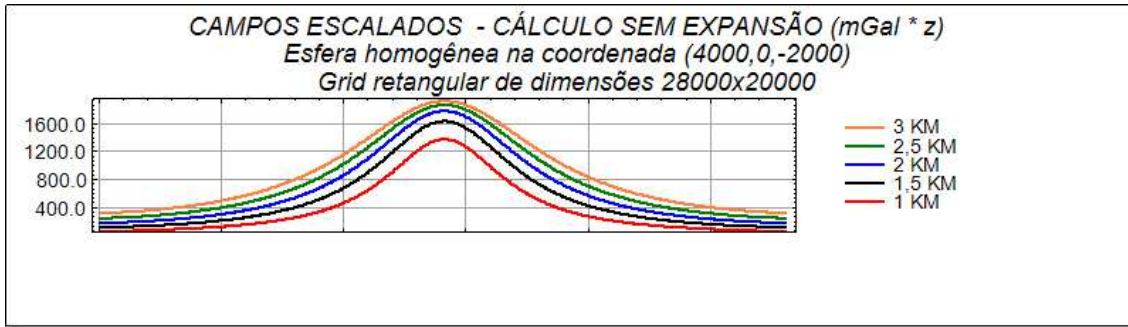


Figura 36: Perfil do campo potencial gravitacional calculado no domínio da transformada de Fourier sem expansão. Campo gerado por uma esfera homogênea situada nas coordenadas cartesianas (4000, 0, -2000). A malha de dados possui dimensões retangulares de 28 km de comprimento por 20 km de largura. Os níveis de continuação para cima adotados foram de 1 km, 1.5 km, 2 km, 2.5 km e 3 km.

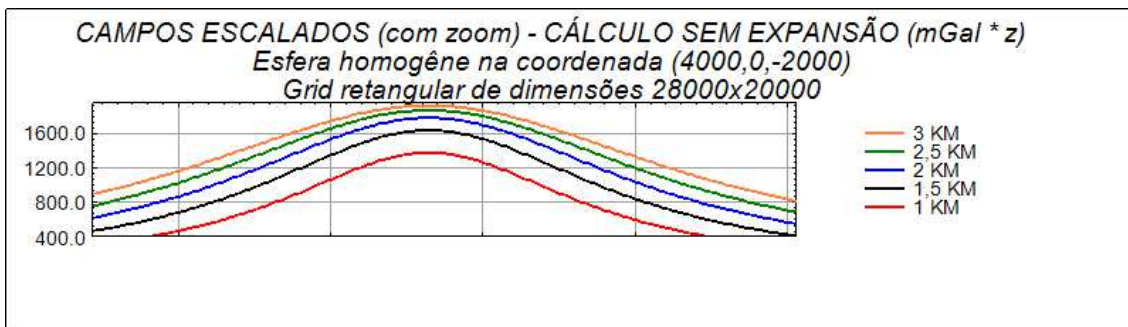


Figura 37: Perfil do campo potencial gravitacional calculado (com *zoom*, para uma melhor visualização) no domínio da transformada de Fourier sem expansão. Campo gerado por uma esfera homogênea situada nas coordenadas cartesianas (4000, 0, -2000). A malha de dados possui dimensões retangulares de 28 km de comprimento por 20 km de largura. Os níveis de continuação para cima adotados foram de 1 km, 1.5 km, 2 km, 2.5 km e 3 km.

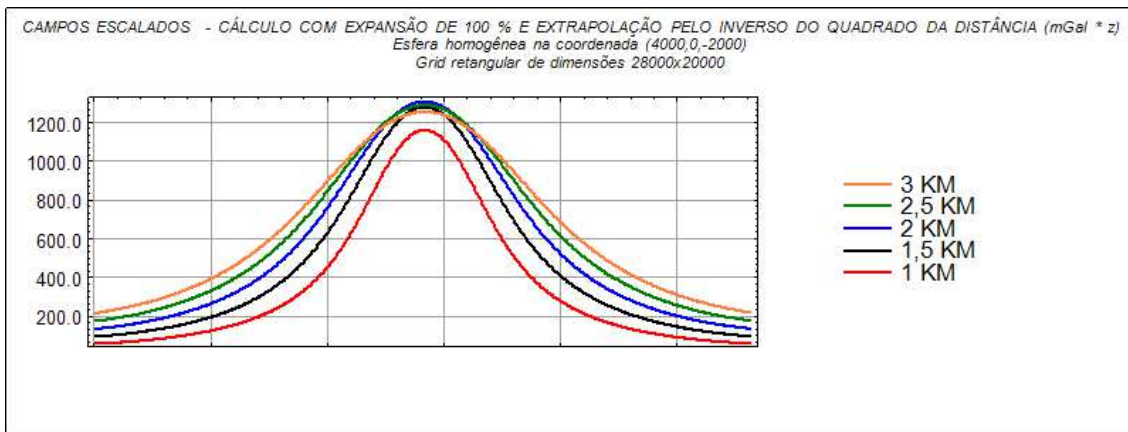


Figura 38: Perfil do campo potencial gravitacional calculado no domínio da transformada de Fourier com expansão de 100 % e extrapolação pelo inverso do quadrado da distância. Campo gerado por uma esfera homogênea situada nas coordenadas cartesianas (4000, 0, -2000). A malha de dados possui dimensões retangulares de 28 km de comprimento por 20 km de largura. Os níveis de continuação para cima adotados foram de 1 km, 1.5 km, 2 km, 2.5 km e 3 km.

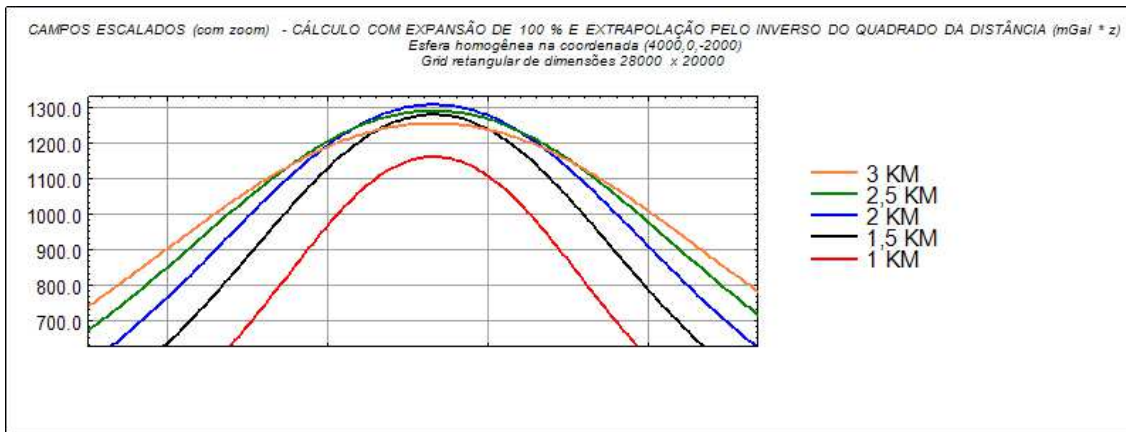


Figura 39: Perfil do campo potencial gravitacional calculado (com *zoom*, para melhor visualização) no domínio da transformada de Fourier com expansão de 100 % e extrapolação pelo inverso do quadrado da distância. Campo gerado por uma esfera homogênea situada nas coordenadas cartesianas (4000, 0, -2000). A malha de dados possui dimensões retangulares de 28 km de comprimento por 20 km de largura. Os níveis de continuação para cima adotados foram de 1 km, 1.5 km, 2 km, 2.5 km e 3 km.

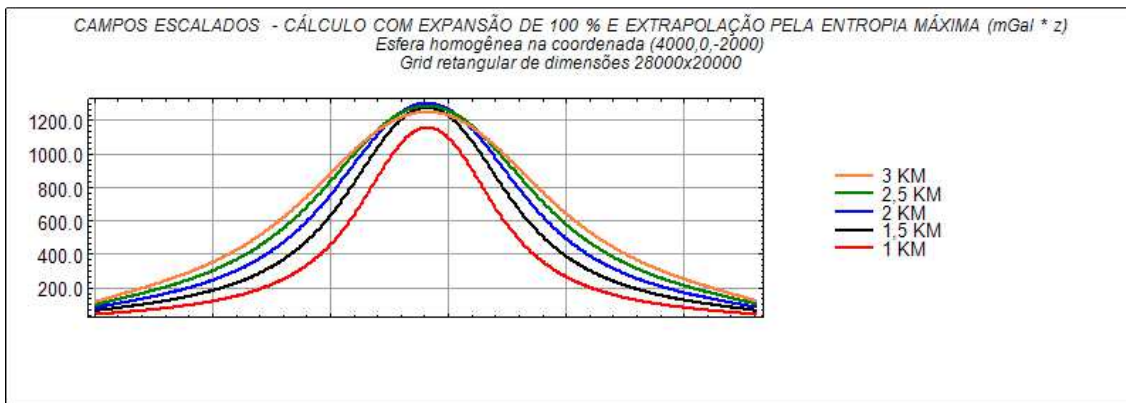


Figura 40: Perfil do campo potencial gravitacional calculado no domínio da transformada de Fourier com expansão de 100 % e extrapolação pela entropia máxima de predição. Campo gerado por uma esfera homogênea situada nas coordenadas cartesianas (4000, 0, -2000). A malha de dados possui dimensões retangulares de 28 km de comprimento por 20 km de largura. Os níveis de continuação para cima adotados foram de 1 km, 1.5 km, 2 km, 2.5 km e 3 km.

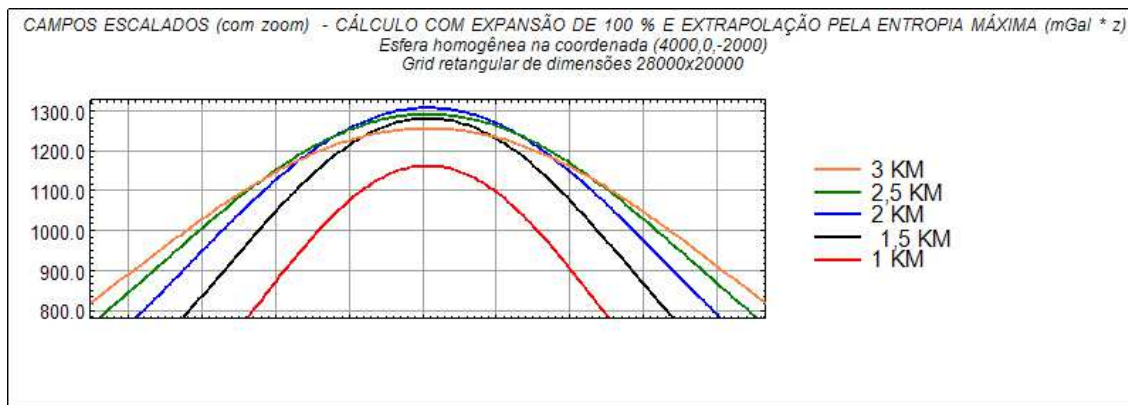


Figura 41: Perfil do campo potencial gravitacional calculado (com *zoom*, para melhor visualização) no domínio da transformada de Fourier com expansão de 100 % e extrapolação pela entropia máxima de predição. Campo gerado por uma esfera homogênea situada nas coordenadas cartesianas (4000, 0, -2000). A malha de dados possui dimensões retangulares de 28 km de comprimento por 20 km de largura. Os níveis de continuação para cima adotados foram de 1 km, 1.5 km, 2 km, 2.5 km e 3 km.

6.3 DERIVADAS VERTICAIS NUMÉRICAS E O EFEITO DE BORDA

O algoritmo de geração da malha de dados para o cálculo analítico do campo de gravidade e das derivadas verticais do campo escalado foi gerado no *software MATLAB*. Já no ambiente da plataforma do *software Oasis montaj*, o cálculo das derivadas verticais do campo escalado utilizando as técnicas da transformada de Fourier foi efetuado seguindo as seguintes etapas:

1. A partir do mapa do campo de gravidade para o nível correspondente a 0 km, o campo gravitacional gerado por duas esferas homogêneas de raios de 500 m e densidades de 3000 kg/m^3 , situadas nas coordenadas cartesianas (-4000 m, 0 m, -2000 m) e (4000 m, 0 m, -2000 m) foi continuado para cima numericamente, ou seja, no domínio da transformada de Fourier, utilizando a extensão **MAGMAP** do *software Oasis montaj*, da empresa **Geosoft**, para os níveis de 2 km, 4 km, 6 km e 8 km. Novamente, considera-se que o módulo da profundidade cresce para baixo e que o eixo z é positivo para baixo. O intervalo de amostragem nas direções dos eixos x e y é de 50 m;
2. A partir dos mapas dos campos gravitacionais continuados numericamente, para cada nível, foi calculada a derivada vertical numérica, ou seja, a derivada vertical no domínio da transformada de Fourier, também para cada nível de continuação. Como já foi enfatizado anteriormente, ao contrário do cálculo da derivada analítica, no qual se dispõem de expressões matemáticas que podem ser ajustadas para cada nível de continuação e também pelo fato de podermos obter uma expressão matemática diferente para cada ordem de derivação, o cálculo da derivada vertical no domínio da transformada de Fourier requer certos

cuidados, uma vez que a operação da derivada vertical no domínio da transformada de Fourier corresponde a um filtro passa alta, ou seja, é um procedimento que, se não aplicado com critério, sendo utilizadas ordens de derivação muito altas, faz com que os ruídos de alta frequência porventura presentes nos dados sejam amplificados (aumentados). Enquanto que, analiticamente, é possível calcular as derivadas de ordem n -ésima, no domínio da transformada de Fourier usualmente computam-se as derivadas de 1ª e de 2ª ordens em aplicações geofísicas práticas. Por outro lado, a derivada vertical é uma ferramenta útil para se obter os detalhes do campo potencial em estudo, permitindo que se estude as variações do campo em função da profundidade, permitindo que se diferenciem corpos geradores de anomalias de campos potenciais próximos entre si que não seriam facilmente distinguíveis com o uso de outras técnicas. Como estamos trabalhando com dados sintéticos, sem a introdução de ruídos, calculamos, a exemplo das derivadas verticais analíticas, ordens de derivação até 4. Como resultado das operações acima citadas, temos como produto final desta etapa de modelagem os mapas, para cada nível de continuação, das derivadas verticais do campo gravitacional continuado para cima em cada nível de continuação;

3. Depois dos cálculos da continuação para cima e das derivadas verticais, o campo escalado das derivadas verticais é determinado para cada nível de continuação, a fim de se verificar a eficiência do método na modelagem das duas esferas de modo analítico e também com o intuito de avaliar o impacto do efeito de borda quando se trabalha com os dados utilizando as técnicas da transformada de Fourier. Então, são gerados perfis, utilizando o *software Oasis montaj*, das derivadas verticais do campo escalado analiticamente de 1ª, 2ª, 3ª e 4ª ordens, das derivadas verticais numéricas de 1ª, 2ª, 3ª e 4ª ordens do campo escalado utilizando expansão de 100 % e o algoritmo de extrapolação do inverso do quadrado da distância e das derivadas verticais numéricas de 1ª, 2ª, 3ª e 4ª ordens do campo escalado utilizando uma expansão da malha de dados original de 100 % e o algoritmo de extrapolação da entropia máxima de predição. Novamente, quando se utiliza o termo "derivada vertical numérica", subentende-se que a derivada vertical foi obtida no domínio da transformada de Fourier, ou seja, a partir do uso das técnicas da transformada de Fourier;

Como são aplicadas duas operações em sequência no domínio da transformada de Fourier sobre o campo potencial gravitacional original, para cada nível de continuação, os cuidados relativos às etapas de pré-processamento - que são a remoção das tendências de 1ª ordem, a expansão da malha de dados onde as operações no domínio de Fourier serão realizadas a certo percentual das dimensões da malha de dados original e a extrapolação dos dados gerados pela expansão com os dados originais - são ainda mais importantes do que no caso do campo escalado para a modelagem de uma

única esfera (sem o uso das derivadas verticais), uma vez que na modelagem das derivadas verticais do campo escalado temos dois pontos de máximo absoluto.

A seguir, temos os perfis gerados para as derivadas verticais analíticas (Figuras, 42, 43, 44 e 45):

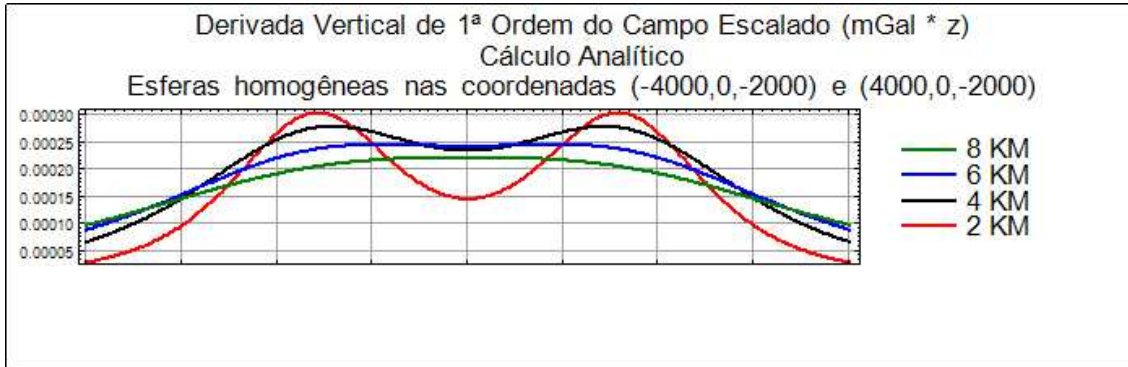


Figura 42: Perfil da derivada vertical de 1ª ordem do campo escalado calculado analiticamente. Campo gerado por duas esferas homogêneas situadas nas coordenadas cartesianas (-4000, 0,-2000) e (4000,0,-2000).

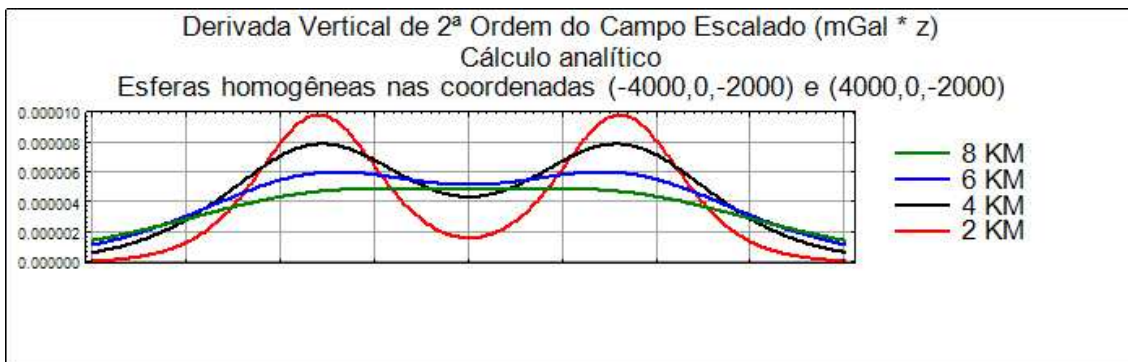


Figura 43: Perfil da derivada vertical de 2ª ordem do campo escalado calculado analiticamente. Campo gerado por duas esferas homogêneas situadas nas coordenadas cartesianas (-4000, 0,-2000) e (4000,0,-2000).

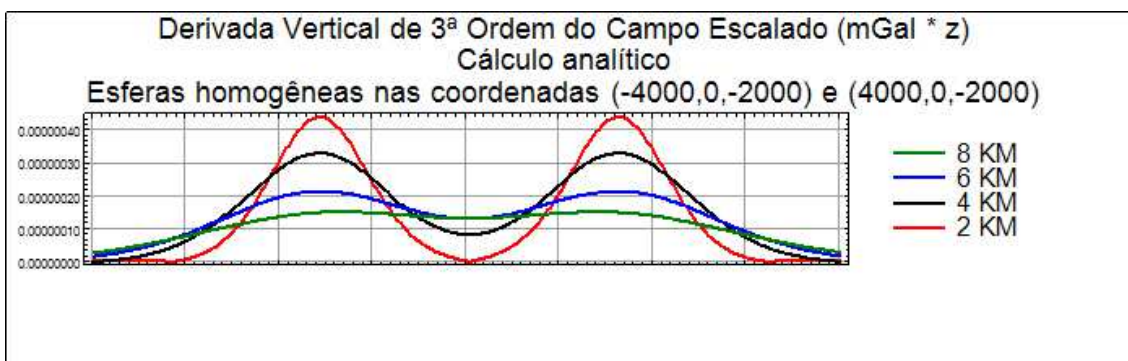


Figura 44: Perfil da derivada vertical de 3ª ordem do campo escalado calculado analiticamente. Campo gerado por duas esferas homogêneas situadas nas coordenadas cartesianas (-4000, 0,-2000) e (4000,0,-2000).

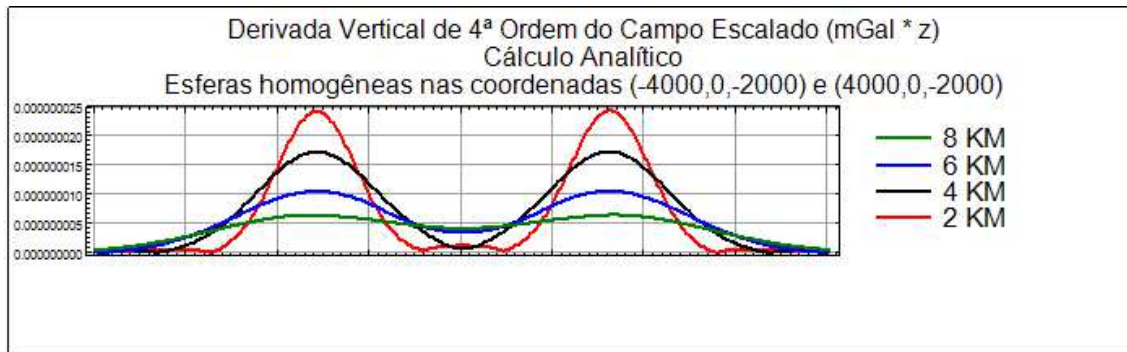


Figura 45: Perfil da derivada vertical de 4ª ordem do campo escalado calculado analiticamente. Campo gerado por duas esferas homogêneas situadas nas coordenadas cartesianas (-4000, 0, -2000) e (4000, 0, -2000).

Assim como no caso de uma esfera, o cálculo analítico identificou corretamente a profundidade das duas esferas e conseguiu distingui-las satisfatoriamente, uma vez que os máximos absolutos estão localizados na curva que representa o nível de continuação correspondente às profundidades das esferas. Evidentemente, a derivada vertical de 4ª ordem obteve a melhor resolução das anomalias das esferas e eliminou melhor o efeito de interferência mútua entre elas.

Os resultados obtidos utilizando expansão de 100 % e extrapolação pela entropia máxima de predição estão ilustrados abaixo (Figuras 46, 47, 48 e 49):

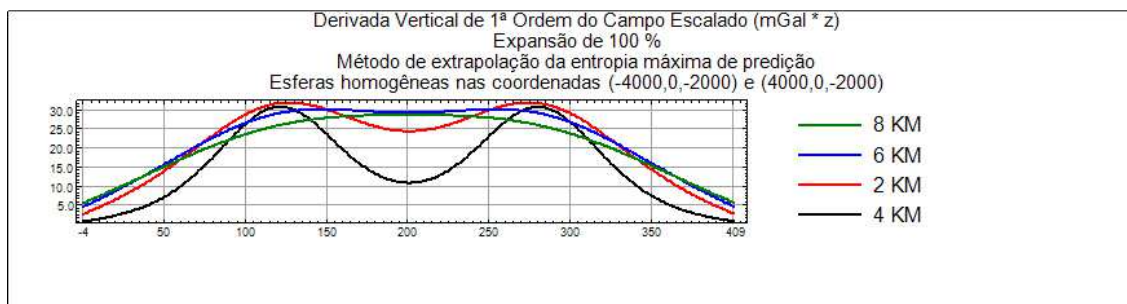


Figura 46: Perfil da derivada vertical de 1ª ordem do campo escalado calculado no domínio da transformada de Fourier com expansão de 100 % e extrapolação pela entropia máxima de predição. Campo gerado por duas esferas homogêneas situadas nas coordenadas cartesianas (-4000, 0, -2000) e (4000, 0, -2000).

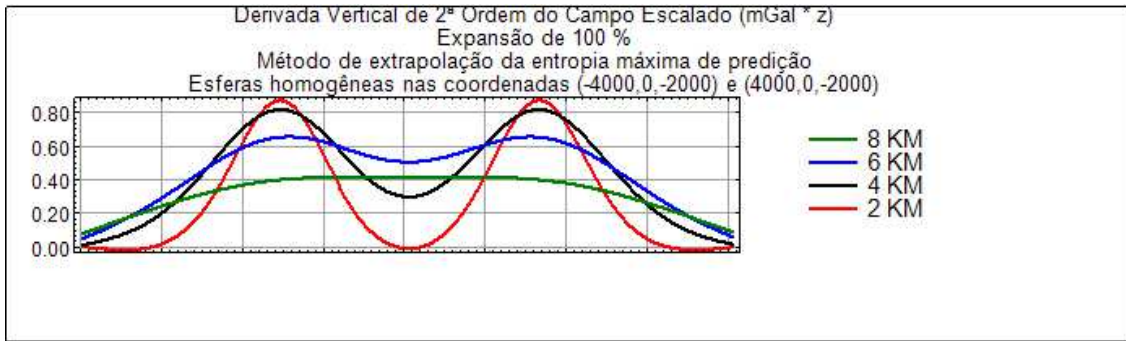


Figura 47: Perfil da derivada vertical de 2ª ordem do campo escalado calculado no domínio da transformada de Fourier com expansão de 100 % e extrapolação pela entropia máxima de predição. Campo gerado por duas esferas homogêneas situadas nas coordenadas cartesianas (-4000, 0, -2000) e (4000,0,-2000).

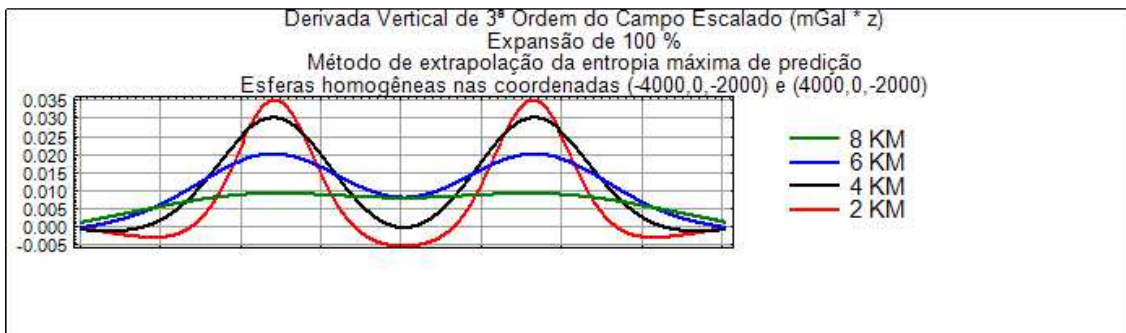


Figura 48: Perfil da derivada vertical de 3ª ordem do campo escalado calculado no domínio da transformada de Fourier com expansão de 100 % e extrapolação pela entropia máxima de predição. Campo gerado por duas esferas homogêneas situadas nas coordenadas cartesianas (-4000, 0, -2000) e (4000,0,-2000).

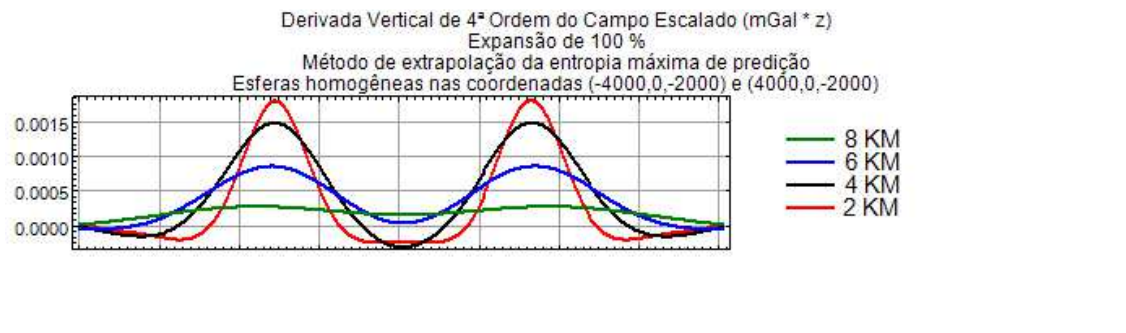


Figura 49: Perfil da derivada vertical de 4ª ordem do campo escalado calculado no domínio da transformada de Fourier com expansão de 100 % e extrapolação pela entropia máxima de predição. Campo gerado por duas esferas homogêneas situadas nas coordenadas cartesianas (-4000, 0, -2000) e (4000, 0,-2000).

A exemplo do que ocorreu no cálculo analítico, a derivada de 4ª ordem apresentou os melhores resultados quanto à eliminação do efeito de interferência mútua entre as esferas. Observou-se ainda que a derivada vertical de 1ª ordem não conseguiu atribuir o valor correto de profundidade, feito que é obtido pelo cálculo das derivadas verticais de 2ª ordem em diante. Além disso, para níveis de continuação muito distantes do nível de continuação correspondente à profundidade da esfera, ou para fontes

situadas a profundidades muito grandes, a caracterização da anomalia fica prejudicada, uma vez que a sua amplitude é muito pequena no espectro da sua transformada de Fourier.

Finalmente, obtemos os resultados para uma taxa de expansão de 100 % e a utilização do algoritmo de extrapolação do inverso do quadrado da distância (Figuras 50, 51, 52 e 53):

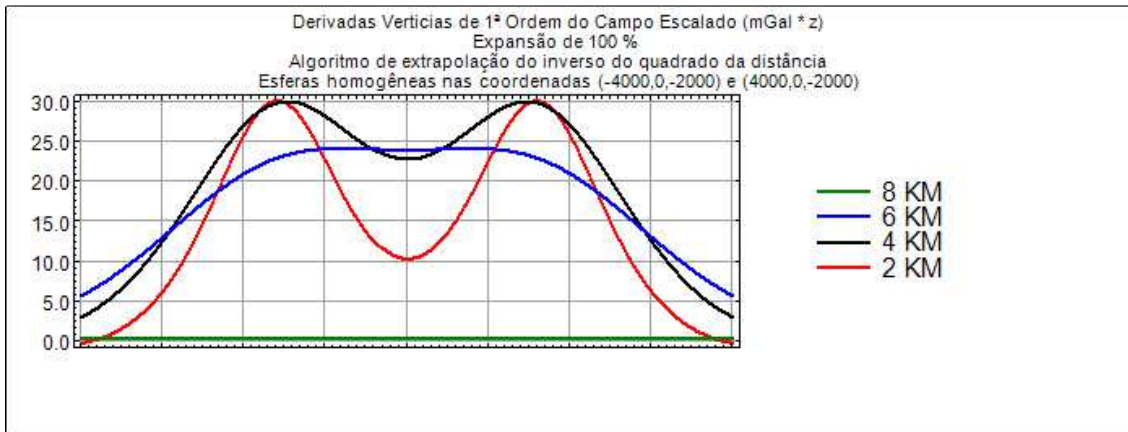


Figura 50: Perfil da derivada vertical de 1ª ordem do campo escalado calculado no domínio da transformada de Fourier com expansão de 100 % e extrapolação pelo inverso do quadrado da distância. Campo gerado por duas esferas homogêneas situadas nas coordenadas cartesianas (-4000, 0, -2000) e (4000,0,-2000).

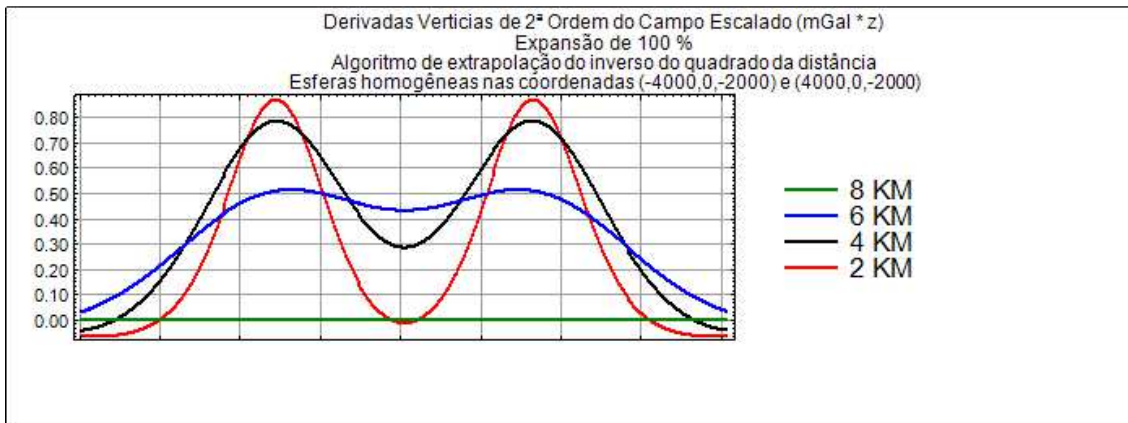


Figura 51: Perfil da derivada vertical de 2ª ordem do campo escalado calculado no domínio da transformada de Fourier com expansão de 100 % e extrapolação pelo inverso do quadrado da distância. Campo gerado por duas esferas homogêneas situadas nas coordenadas cartesianas (-4000, 0, -2000) e (4000,0,-2000).

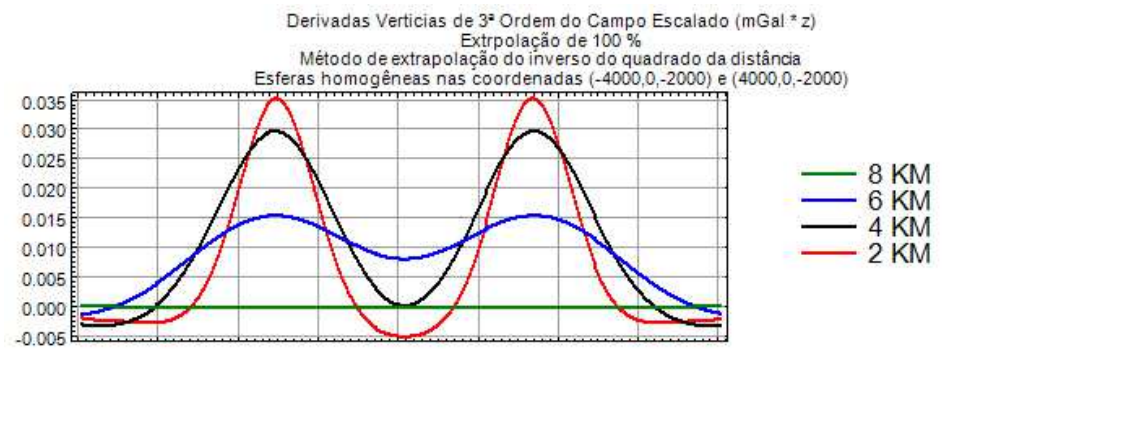


Figura 52: Perfil da derivada vertical de 3ª ordem do campo escalado calculado no domínio da transformada de Fourier com expansão de 100 % e extrapolação pelo inverso do quadrado da distância. Campo gerado por duas esferas homogêneas situadas nas coordenadas cartesianas (-4000, 0, -2000) e (4000,0,-2000).

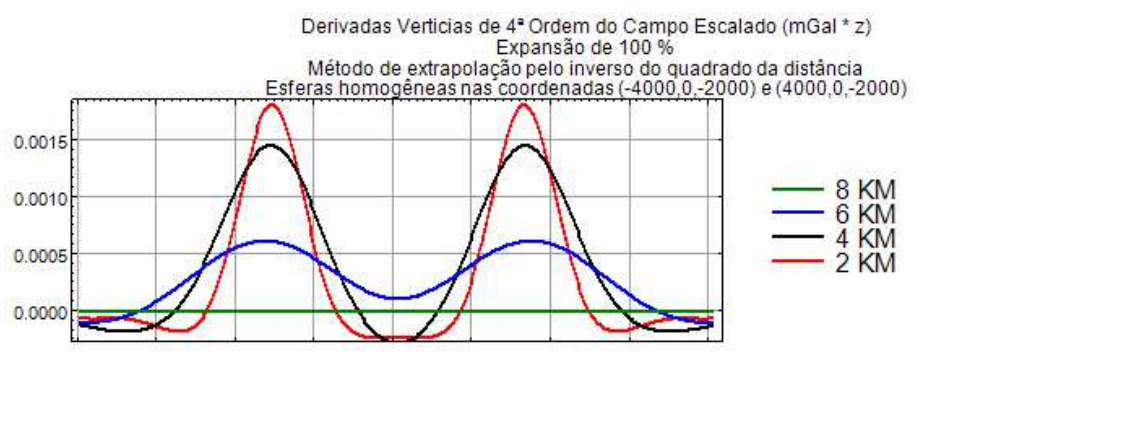


Figura 53: Perfil da derivada vertical de 4ª ordem do campo escalado calculado no domínio da transformada de Fourier com expansão de 100 % e extrapolação pelo inverso do quadrado da distância. Campo gerado por duas esferas homogêneas situadas nas coordenadas cartesianas (-4000, 0, -2000) e (4000,0,-2000).

Os resultados obtidos para o algoritmo de extrapolação do inverso do quadrado da distância foram similares aos obtidos para o algoritmo de extrapolação da entropia máxima de predição. Novamente, a derivada vertical de 1ª ordem não conseguiu determinar com precisão a profundidade das esferas, o que só foi conseguido com as derivadas verticais de ordem superior a 2. Mais uma vez, o nível de continuação correspondente a 8 km praticamente não conseguiu caracterizar anomalia alguma. Em síntese, ambos os métodos de extrapolação não mostraram diferenças significativas entre si. Entretanto, como se tratam de dados sintéticos, faz-se necessário aplicar tal simulação a dados reais, os quais contêm ruídos, principalmente de alta frequência, a fim de avaliar o efeito da introdução de ruídos de alta frequência quando do aumento da ordem de derivação, para que possa efetivamente comparar os dois métodos de extrapolação aqui analisados para dados sintéticos. Enfatiza-se, novamente, que, para dados ruidosos demais, não se recomenda calcular derivadas verticais de ordem superior a dois.

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS E CONCLUSÕES

Conforme esperado, a modelagem analítica dos campos escalados e de suas derivadas verticais de 1ª, 2ª, 3ª e 4ª ordens determinou a profundidade da fonte corretamente. Em outras palavras, a modelagem analítica atribuiu um valor máximo absoluto do campo escalado e de suas derivadas verticais para o nível de continuação do campo de gravidade que corresponde à profundidade original da esfera. Com relação às derivadas verticais analíticas de 1ª, 2ª, 3ª e 4ª ordens do campo escalado, observou-se que, quanto maior a ordem da derivada, melhor é a resolução na separação das esferas e que, quanto maior a separação horizontal entre as esferas, menor é a ordem de derivação necessária para eliminar o efeito de interferência mútua entre elas.

Quanto à modelagem dos campos escalados no domínio da transformada de Fourier, percebeu-se que, quando não se aplicam as etapas de pré-processamento necessárias (remoção de tendências, expansão da malha de dados original e extrapolação), o nível de continuação relacionado ao máximo absoluto do campo escalado corresponde ao nível de continuação mais distante daquele correspondente à profundidade real da esfera quando, em realidade, o nível de continuação concernente à profundidade da esfera deveria assinalar o valor do máximo absoluto do campo escalado que fora modelado numericamente. Portanto, o valor da profundidade da esfera não é determinado corretamente.

Tal fato é ocasionado pelo efeito de borda e se torna mais evidente quanto maior for o deslocamento das coordenadas cartesianas da esfera em relação ao centro da malha de dados. Em suma, o efeito de borda é uma consequência do grau de assimetria da anomalia em relação às bordas, uma vez que, quanto mais assimétrica é a anomalia em relação às bordas de um mapa, menos amostrados se tornam os dados na região das proximidades da borda no lado para o qual a anomalia se encontra deslocada em relação ao centro do mapa. Tal fato resulta na geração de tendências (que podem ser de 1ª, 2ª e até 3ª ordem, dependendo da função que a descreva) e dificulta o processamento no domínio da FFT, uma vez que as anomalias de interesse devem ser periódicas para que ela seja modelada corretamente tanto quanto à sua amplitude, refletindo a precisão no cálculo da profundidade, quanto também à sua extensão lateral, que reflete a precisão na determinação dos seus parâmetros físicos e geométricos (raio e densidade). Evidentemente, quanto maior for a profundidade da esfera, mais crítico se torna o efeito de borda, uma vez que a amplitude de uma anomalia muito profunda é muito pequena no espectro da transformada de Fourier.

A fim de contornar os efeitos de borda, lançou-se mão das etapas de pré-processamento descritas anteriormente. Foram utilizados dois algoritmos de extrapolação dos dados originais com os dados resultantes da expansão da malha de dados original: o inverso do quadrado da distância e a entropia máxima de predição. Os valores de expansão aplicados foram tais que se pudesse reproduzir a periodicidade da função que descreve a anomalia gerada pela esfera. Quando a anomalia se encontrava simétrica em relação às bordas, o percentual de expansão foi de 100 %. Nesse caso, os

métodos de extrapolação obtiveram resultados similares e conseguiram determinar a profundidade da esfera corretamente, ou seja, o nível de continuação referente ao da profundidade da esfera correspondeu àquele ao qual se atribuiu o valor máximo do campo escalado.

Entretanto, à medida que a esfera modelada foi deslocada do centro da malha de dados, revelou-se que o método de extrapolação da entropia máxima teve uma resolução melhor do que o inverso do quadrado da distância, principalmente com relação à extensão lateral das curvas dos níveis de continuação, na região das bordas de tais curvas. Essa diferença de resolução é diretamente proporcional à distância de deslocamento da esfera em relação ao centro do mapa. Em alguns casos nos quais o algoritmo do inverso do quadrado da distância foi utilizado, alguns valores nas bordas das curvas de alguns níveis de continuação acabaram por ter valores maiores que os valores relativos à amplitude máxima na curva do nível de continuação correspondente à profundidade da esfera que, em tese, teria o valor máximo absoluto do campo escalado. Tal fato ficou mais evidente quando a esfera foi deslocada de 4 km em relação ao centro da malha de dados.

Com relação às derivadas verticais numéricas do campo escalado, quando se aplica um percentual de expansão de 100 %, ambos os algoritmos de extrapolação conseguem determinar a profundidade da esfera sem que haja uma diferença significativa de resolução entre eles. A derivada vertical de 1ª ordem, para ambos os métodos de extrapolação, apresentou certa deficiência em eliminar o efeito de interferência mútua entre as esferas, bem como em determinar a profundidade correta das duas esferas. Como era de se esperar, as derivadas de 2ª, 3ª e 4ª ordem forneceram uma resolução melhor na separação dos corpos, ou seja, conseguiram eliminar com mais eficiência o efeito da interferência mútua entre as esferas. Evidentemente, quanto menor for a distância horizontal entre as esferas, mais difícil se torna a remoção do efeito de interferência mútua entre as esferas e vice-versa, a exemplo do que já ocorrera com o cálculo analítico das derivadas verticais do campo escalado.

De uma maneira geral, o método de extrapolação da entropia máxima de predição revelou-se como sendo a solução mais adequada para contornar os efeitos de borda na modelagem numérica dos campos escalados, uma vez que conseguiu determinar com uma resolução melhor do que o algoritmo do inverso do quadrado da distância a extensão lateral das anomalias geradas pelas esferas modeladas. Entretanto, para as derivadas verticais, ambos os métodos de extrapolação apresentaram resultados semelhantes. Ressalta-se a importância da aplicação das técnicas de remoção de tendências, expansão da malha de dados original e da extrapolação dos dados originais com os dados expandidos a fim de se determinar as profundidades das fontes geradores de campos potenciais com uma boa precisão. Como, na prática, trabalhamos com grande volume de dados amostrados (ou discretos), lança-se mão das técnicas da FFT e tais procedimentos descritos nesse parágrafo se tornam fundamentais para que se possa usufruir das vantagens da metodologia DEXP em relação à Deconvolução de Euler na

determinação das profundidades das fontes, uma vez que a metodologia DEXP não gera um número alto de soluções como a Deconvolução de Euler.

8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

A referência bibliográfica básica, da qual derivam as demais, é o artigo intitulado “DEXP: A fast method to determine the depth and the structural index of potential sources”, publicado em 2006 por Maurizio Fedi, do Departamento de Ciências da Terra da Universidade de Napoli. Este artigo expõe as bases teóricas do método.

A lista geral de referências bibliográficas inclui:

- Barbosa, V. e Silva, J. B., 2005. Deconvolução de Euler: Passado, presente e futuro – um tutorial: Revista da Sociedade Brasileira de Geofísica, vol. 23, no 3, pp 243-250;
- Blakely, R. J., 1995. Potential Theory in Gravity & Magnetic Applications: Cambridge University Press;
- Brigham, O., 1988. The Fast Fourier Transform and its Applications: Prentice-Hall, Inc.;
- Burg, J. P., 1975, Maximum Entropy Spectral Analysis, Stanford University. 168 p;
- Fedi, M., 2006. DEXP: A fast method to determine the depth and the structural index of potential sources: Geophysics, vol. 72;
- Gilbert, D. e Galdeano, A., 1985. A computer program to perform transformations of gravimetric and aeromagnetic surveys: Computers & Geosciences, vol. 11, no. 5, pp 553-588;
- <http://www.geosoft.com/support/downloads/technical-documentation>, **montaj** *MAGMAP Filtering Tutorial*;

APÊNDICE I

FORMULAÇÃO MATEMÁTICA BÁSICA DA ENTROPIA MÁXIMA DE PREDIÇÃO

Formulação Matemática do Algoritmo da Entropia Máxima de Predição para a Análise Espectral Monocanal

Antes de iniciar este tópico da dissertação, é importante salientar que apenas uma parte da teoria matemática do método de extrapolação da entropia máxima de predição será abordada. Para um detalhamento maior, a referência a ser consultada é a tese de doutorado de Burg, de 1975, a qual está, evidentemente, incluída nas referências bibliográficas.

Na forma mais elementar e usual do princípio da entropia máxima para a estimativa do espectro de potência a partir de um canal único, a determinação do espectro de potência consiste simplesmente em encontrar o espectro de potência $P(f)$, ao qual está relacionada uma série temporal complexa, que maximize o valor da integral a seguir (Burg, 1975):

$$\int_{-W}^W \ln P(f) df \quad (I.1)$$

, sabendo que $P(f)$ satisfaz um conjunto de N equações funcionais, como seguem:

$$\int_{-W}^W P(f)G_n(f)df = g_n ; n = 1 \text{ até } N \quad (I.2)$$

As condições de contorno usuais que são definidas na análise de séries temporais também são válidas no estudo do princípio da entropia máxima. Isto é, as séries temporais são amostradas para um período fundamental uniforme de Δt , sendo que a frequência de Nyquist é definida como (Burg, 1975):

$$W = \frac{1}{(2\Delta t)} \quad (I.3)$$

Deste modo, temos que a série temporal é uma série de banda limitada para $\pm W$. Os termos $G_n(f)$ são chamados de funções de teste e os termos g_n são os valores resultantes das medições (Burg, 1975).

A premissa básica da análise espectral pela entropia máxima é que as séries temporais que estão sendo analisadas e usadas para reconstruir o espectro de potência são as mais randômicas (ou aleatórias), ou, ainda, as séries temporais menos preditas que sejam consistentes com as medições. Em termos da teoria da informação, esta afirmação pode ser entendida como sendo que a entropia por amostra de uma série temporal é um valor máximo. Para um dado espectro de potência, a série temporal de

máxima entropia é governada por uma função gaussiana de probabilidade e que a entropia é proporcional à integral do logaritmo do espectro de potência. Deste modo, a série temporal estacionária de máxima entropia é definida como sendo a série temporal gaussiana cujo espectro de potência maximiza a integral da equação (I.1), sob as condições impostas pela equação (I.2) (Burg, 1975).

O espectro de potência de uma série temporal estacionária especifica completamente as informações estatísticas de 2ª ordem de um processo randômico. Se aplicamos dois filtros digitais, lineares e invariantes no tempo, cujas transformadas de Fourier são denotadas por $H_1(f)$ e $H_2(f)$, respectivamente, de modo tal que obtemos as séries temporais resultantes, denotadas respectivamente por $y_1(t)$ e $y_2(t)$, então o valor médio de $y_1^*(t)y_2(t)$ é dado por (Burg, 1975):

$$\overline{y_1^*(t)y_2(t)} = \int_{-W}^W P(f)H_1^*(f)H_2(f) df \quad (I.4)$$

, onde o símbolo * indica o conjugado complexo.

Deste modo, o espectro contém todas as informações estatísticas a respeito da série temporal que são necessárias para encontrar o produto médio de duas operações lineares e invariantes no tempo (Burg, 1975).

Embora tão somente o conhecimento das informações estatísticas de 2ª ordem seja insuficiente para a determinação da entropia por amostra das séries temporais, ele consegue determinar um limite superior, por amostra, para o valor da entropia. Este limite superior é alcançado se a série temporal é um processo gaussiano (Burg, 1975).

É possível derivar a entropia de uma série temporal gaussiana, lembrando que a entropia de uma variável gaussiana aleatória de média zero cuja variância é igual a σ^2 é dada por $\frac{1}{2}\ln(2\pi e\sigma^2)$ (Burg, 1975).

Considerando a situação na qual nós temos todas as amostras com valores acima de um certo parâmetro x_0 e que se deseja determinar o quanto de informação se obtém quando se encontra o valor de x_0 , temos que, se a série temporal consiste de um ruído branco gaussiano, então a entropia de x_0 será $\frac{1}{2}\ln(2\pi eP_0)$, onde P_0 é o valor médio quadrático da série temporal de média nula. Contudo, se a série temporal tem um espectro que não corresponde a um ruído branco gaussiano, então a incógnita x_0 será ao menos predita a partir das amostras prévias e a sua entropia será menor do que $\frac{1}{2}\ln(2\pi eP_0)$ (Burg, 1975).

Para um processo gaussiano, o filtro de predição é linear. Isto é, a melhor predição de x_0 a partir das amostras prévias tem a forma $\sum_{n=-1}^{-\infty} a_n x_n$. Adicionalmente, o erro na predição é distribuído segundo um processo gaussiano com média nula (Burg, 1975).

Uma vez que parte não predita de x_0 contém as informações atuais do espectro que serão recebidas quando o valor de x_0 for conhecido, a entropia atual de x_0 é $\frac{1}{2} \ln(2\pi e P_\infty)$, onde P_∞ é o menor erro médio quadrático na predição de x_0 de um conjunto infinito de amostras anteriores. Temos a seguinte formulação para a determinação da entropia do espectro de uma série temporal aleatória qualquer (Burg, 1975):

$$\frac{1}{2W} \int_{-W}^W \ln P(f) df = \ln \left(\frac{P_\infty}{2W} \right) \quad (I.5)$$

Para uma série temporal do tipo gaussiana, a entropia por amostra é dada por:

$$\frac{1}{4W} \int_{-W}^W \ln(4\pi e W P(f)) df \quad (I.6)$$

, sendo que a integral acima fornece o limite superior da entropia de qualquer série temporal gaussiana cujo espectro de potência seja $P(f)$ (Burg, 1975).

Sem que seja postulado qualquer pressuposto acerca de distribuições de probabilidade, a única coisa que pode ser afirmada é que o espectro de potência que maximiza a equação (I.1), sob as condições impostas pela equação (I.2), tem o menor erro médio quadrático de predição, sendo tal erro o mais linear possível. Em outras palavras, o menor erro quadrático na predição da variável x_0 por uma combinação linear de todas as amostras anteriores é um máximo. Neste caso, lidamos com as séries temporais que pertencerem à classe das séries temporais mais randômicas que satisfaçam as equações (I.1) e (I.2). Assumindo que a entropia de uma série temporal é uma função não decrescente do erro médio quadrático linear, então a maximização da equação (I.1) acarreta uma maximização da entropia da série temporal (Burg, 1975).

Quando temos dois espectros de potência, denotados por $P_1(f)$ e $P_2(f)$, respectivamente, temos que:

$$\int_{-W}^W \ln P_1(f) df \geq \int_{-W}^W \ln P_2(f) df \quad (I.7)$$

, então a entropia de $P_1(f)$ é maior ou igual do que a entropia de $P_2(f)$. Restringindo o espectro de potência $P(f)$ ao conjunto de espectros que satisfaçam a equação (I.2), um espectro com entropia máxima pode então ser obtido de dois espectros de potência distintos (Burg, 1975).

Análise Espectral da Entropia Máxima de Predição Mono Canal a partir de Medidas de Autocorrelação

A aplicação mais importante da análise espectral da entropia máxima de predição (MESA, na sigla em inglês) é estimativa ou reconstrução de um espectro de potência a partir do conhecimento parcial da função de autocorrelação, denotada por $R(n)$. Nesta situação, a equação de medição é definida como segue (Burg, 1975):

$$R(n) = \int_{-W}^W P(f) e^{i2\pi f n \Delta t} df ; (-N \leq n \leq N) \quad (I.8)$$

Neste caso, Δt representa o período fundamental (ou básico) de amostragem e:

$$W = 1/(2\Delta t) \quad (I.9)$$

representa a frequência de Nyquist. É interessante notar que $R(n) = R^*(-n)$, onde o símbolo * representa o conjugado complexo, de modo tal que n pode ser restrito ao intervalo de 0 até N (Burg, 1975).

Apesar de a análise espectral pela entropia máxima não se limitar às informações da função de autocorrelação, a base da teoria foi feita nas medidas da função de autocorrelação devido ao fato de a estimativa do espectro de potência pela função de autocorrelação ter sido definida a partir da relação existente, no domínio da transformada de Fourier, entre o espectro de potência e a função de autocorrelação. Neste processo, primeiramente é feita uma estimativa da função de autocorrelação, seguida do cálculo da sua transformada de Fourier a fim de se obter finalmente o espectro de potência. Os valores da função de autocorrelação podem ser facilmente estimados a partir de dados de séries temporais discretas. Além disso, é muito fácil resolver, em termos computacionais, o problema de se determinar a máxima entropia variacional em termos das suas medições de autocorrelações. Muito do sucesso do método da entropia máxima se deve ao fato de que, com posse dos valores iniciais de autocorrelação, o cálculo do espectro de potência por entropia máxima não é consideravelmente mais complexo do que o cálculo das estimativas convencionais de espectros de potência (Burg, 1975).

A Técnica de Estimativa de Burg

Embora o cálculo do espectro de potência pelo método da entropia máxima a partir dos valores da função de autocorrelação tenha sua importância teórica, histórica e computacional prática, é necessário lançar mão de um processo que considere os problemas envolvidos na análise de dados amostrados. A fim de contornar tal questão, são aplicados filtros de predição às séries temporais. É o chamado processo autorregressivo, o qual permite estabelecer uma conexão entre as premissas do algoritmo da entropia máxima e a modelagem de séries temporais. Com a técnica de

Burg, são determinados os chamados coeficientes de reflexão dos filtros de predição ao invés dos valores da função de autocorrelação (Burg, 1975).

Suponhamos que temos uma série temporal estacionária, denotada por x_s , e que desejemos prever o próximo valor da série temporal pelo uso de uma combinação linear das N amostras imediatamente anteriores. Considerando a_{-n} como sendo o fator de ponderação da n -ésima amostra anterior, temos que o valor predito de x_s será dado por (Burg, 1975):

$$\sum_{n=1}^N (-a_n)x_{s-n} \quad (I.10)$$

, e o erro na predição será dado por:

$$x_s - \sum_{n=1}^N (-a_n)x_{s-n} = \sum_{n=0}^N a_n x_{s-n} \quad (I.11)$$

, onde se define $a_0 = 1$. O erro médio quadrático é dado por:

$$\overline{\sum_{m=0}^N a_m^* x_{s-m}^* \sum_{n=0}^N a_n x_{s-n}} = \sum_{m=0}^N \sum_{n=0}^N \overline{a_m^* x_{s-m}^* a_n} = \sum_{m=0}^N \sum_{n=0}^N a_m^* R(m-n) a_n \quad (I.12)$$

, onde a função de autocorrelação da série temporal estacionária é definida como segue:

$$R(\tau) = \overline{x_n^* x_{n+\tau}} \quad (I.13)$$

Há várias maneiras de se calcular o valor de a_n ($n = 1$ até N) que tornem o erro médio quadrático um valor mínimo. Um dos métodos usuais se assemelha ao processo de completar quadrados de equações. Podemos formular a equação (I.11) na sua forma matricial, assumindo que a ordem n -ésima da chamada matriz de autocorrelação, formada pelos valores de $R(\tau)$, é sempre definida com valores positivos. Tomando b_n ($n = 0$ até N) e $b_0 = 1$, temos (Burg, 1975):

$$\sum_{m=0}^N \sum_{n=0}^N a_m^* R(m-n) a_n = P_N + \sum_{m=0}^N \sum_{n=0}^N (a_m^* - b_m^*) R(m-n) (a_n - b_n) \quad (I.14)$$

Se tivermos $P_N > 0$ e $R(m-n)$ definida de modo a assumir apenas valores positivos, o valor mínimo ocorre quando temos $a_m = b_m$. Deste modo, P_N é o erro médio quadrático de predição de valor mínimo e a solução da equação (I.14) nos fornece um filtro linear ótimo. Se o filtro a_n difere do filtro ótimo b_n , então o erro de predição será maior e não disporemos mais de um filtro ótimo de predição (Burg, 1975).

Supondo agora que desejemos encontrar o erro médio quadrático de valor mínimo da estimativa de predição de uma incógnita x_s , mas não a partir dos valores prévios N das séries temporais, mas a partir dos N valores subsequentes. Tome d_{-n}

como sendo o fator ótimo de ponderação para a n -ésima amostra subsequente. Então, o N -ésimo valor predito de x_s será (Burg, 1975):

$$\sum_{n=1}^N (-d_n)x_{s+n} \quad (I.15)$$

O erro em tal estimativa será dado por:

$$x_s - \sum_{n=1}^N (-d_n)x_{s+n} = \sum_{n=0}^N d_n x_{s+n} \quad (I.16)$$

, onde temos $d_0 = 1$.

Resolvendo a equação matricial de maneira análoga ao que foi feito para o cálculo do erro de predição para amostras anteriores à N -ésima amostra, temos que o filtro ótimo de predição para amostras posteriores à amostra em estudo é apenas o conjugado complexo, reverso no tempo, do filtro ótimo de predição para estimativas de amostras anteriores àquela em estudo. Deste modo, é possível reescrever o erro de predição para amostras posteriores, denotado por h_s , em termos dos coeficientes do filtro de predição para amostras anteriores àquela em estudo, como segue (Burg, 1975):

$$h_s = \sum_{n=0}^N a_n^* x_{s+n} \quad (I.17)$$

É importante notar que o erro de predição para amostras posteriores também é igual ao valor de P_N definido para o erro de predição para amostras anteriores. Contudo, o fato de a predição para amostras anteriores e posteriores terem o mesmo espectro de potência de saída não é uma propriedade única e exclusiva dos filtros ótimos de predição. Tal propriedade é simplesmente uma consequência da operação do conjugado complexo, a qual se reflete na propriedade de reversão no domínio do tempo (Burg, 1975).

Por exemplo, para o filtro arbitrário $a_0 + a_1z + \dots + a_Nz^N$, temos que:

$$\left| \sum_{n=0}^N a_n z^n \right|^2 = \sum_{n=0}^N a_n z^n \sum_{m=0}^N a_m^* z^{-m} = \left| \sum_{m=0}^N a_m^* z^{-m} \right|^2 \quad (I.18)$$

O Processo Autorregressivo

Tomando a equação de erro da predição:

$$e_s = \sum_{n=0}^N a_n x_{s-n} \quad (I.19)$$

, podemos reescrevê-la como segue:

$$x_s = e_x - \sum_{n=1}^N a_n x_{s-n} \quad (I.20)$$

Se assumirmos que e_s se constitui de variáveis linearmente independentes, isto é, se as séries temporais de e_s possuem um espectro branco, então as séries temporais geradas pela equação (I.20) são processos autorregressivos de ordem N . A fim de que a equação (I.20) caracterize um processo estável, o filtro $\sum_{n=0}^N a_n z^n$ deve ser de fase com valor mínimo, uma vez que se trata de um filtro ótimo de predição. Os espectros das séries temporais de x_s são claramente dados pelo espectro de máxima entropia de ordem N (Burg, 1975).

APÊNDICE II

CONTINUAÇÃO PARA CIMA

A premissa básica consiste nas propriedades harmônicas dos campos potenciais para regiões localizadas fora das fontes causadoras de anomalias. Se não há fontes no semi espaço superior, então temos que:

$$\Delta[U(x, y, z)] = 0, \text{ com } z \geq 0 \quad (II.1)$$

, onde $U(x, y, z)$ é o campo gravimétrico e Δ representa o operador laplaciano (Blakely, 1995). Se o campo gravimétrico $U(x, y, z)$ é conhecido em qualquer ponto do semi espaço superior, então é possível continuar o campo gravimétrico no semi espaço superior. O problema de determinar o campo gravimétrico para níveis de continuação maiores que zero é chamado de problema de Dirichlet. A solução para tal problema é obtida através de uma integral que usa a função de Green, cuja expressão, no sistema de coordenadas retangulares, é dada por (Blakely, 1995):

$$U(x, y, z_0 - \Delta z) = \frac{\Delta z}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{U(x', y', z_0)}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (\Delta z)^2]^{3/2}} dx' dy'; \quad \Delta z > 0 \quad (II.2)$$

A equação acima é chamada de integral da continuação para cima. Tal equação ilustra como calcular o valor do campo potencial para qualquer ponto acima de um nível situado em uma superfície horizontal a partir de um conhecimento completo do campo

na tal superfície. Evidentemente, alguns compromissos são exigidos em aplicações práticas, uma vez que nós nunca sabemos com precisão os valores do campo potencial para cada ponto de um plano infinito. É de particular importância conhecer com precisão o campo para cada nível de continuação, bem como a extensão lateral de todas as fontes causadoras de anomalias, uma recomendação que é difícil de ser conseguida na prática (Blakely, 1995).

A integral da continuação para cima pode ser utilizada para continuar dados medidos em um nível de continuação (altura ou altitude) de uma dada superfície para outro nível de continuação de outra superfície. Para cada ponto da nova superfície, a integral dupla deve ser avaliada, o que se torna uma tarefa muito árdua do ponto de vista computacional. Tal procedimento pode ser realizado de modo mais eficiente no domínio da transformada de Fourier (Blakely, 1995).

A integral da continuação para cima pode ser vista como uma convolução em duas dimensões:

$$U(x, y, z_0 - \Delta z) = \iint_{-\infty}^{\infty} U(x', y', z_0) \psi_u(x - x', y - y', \Delta z) dx' dy' \quad (II.3)$$

, onde:

$$\psi_u(x, y, \Delta z) = \frac{\Delta z}{2\pi} \frac{1}{(x^2 + y^2 + (\Delta z)^2)^{3/2}} \quad (II.4)$$

Se o campo potencial U medido na superfície $z = z_0$ satisfaz a seguinte inequação:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty \quad (II.5)$$

, então temos uma transformada de Fourier, denotada por $\mathcal{F}[U]$. A representação da operação da continuação para cima no domínio da transformada de Fourier é obtida aplicando (calculando) a transformada de Fourier para ambos os lados da integral da continuação para cima analítica e em seguida aplicando o teorema da convolução no domínio da transformada de Fourier, como segue (Blakely, 1995):

$$\mathcal{F}[U_u] = \mathcal{F}[U] \mathcal{F}[\psi_u] \quad (II.6)$$

, onde $\mathcal{F}[U_u]$ é a transformada de Fourier do campo continuado para cima. O que é necessário obter é uma expressão analítica para o termo $\mathcal{F}[\psi_u]$, a qual pode ser encontrada a partir da transformada de Fourier de $\psi_u(x, y, \Delta z)$. É importante, contudo, notar que (Blakely, 1995):

$$\psi_u(x, y, \Delta z) = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \Delta z} \frac{1}{r} \quad (II.7)$$

, onde:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + (\Delta z)^2} \quad (II. 8)$$

Logo, a transformada de Fourier do termo $\psi_u(x, y, \Delta z)$ é dada por:

$$\mathcal{F}[\psi_u] = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \Delta z} \mathcal{F}\left[\frac{1}{r}\right] = -\frac{\partial}{\partial \Delta z} \frac{e^{-|k|\Delta z}}{|k|} = e^{-\Delta z|k|}; \Delta z > 0 \quad (II. 9)$$

Em termos qualitativos, a continuação para cima transforma o campo potencial medido em uma superfície em um campo potencial medido em outra superfície acima de todas as fontes de interesse. A continuação para cima atenua anomalias em função do seu respectivo número de onda. Quanto menor é o número de onda, maior é a atenuação ocasionada pela operação de continuação para cima. Ou seja, a continuação para cima atenua fontes situadas a profundidades menores, enfatizando as anomalias mais profundas. É interessante notar que um campo potencial pode ser calculado para qualquer ponto dentro de uma região de modo tal que nenhum conhecimento adicional a respeito das fontes do campo seja necessário, exceto pelo fato de que nenhuma fonte possa estar localizada dentro da região em questão (Blakely, 1995).

É importante ainda enfatizar outros aspectos concernentes à operação da continuação para cima no domínio da transformada de Fourier (Blakely, 1995):

1. O processo de continuação para cima atenua todos os números de onda, exceto $|k| = 0$;
2. Cada número de onda é atenuado para um grau maior do que todos os demais números de onda menores;
3. O grau de atenuação aumenta com o aumento de Δz ;

O operador da continuação para cima permite o cálculo da anomalia do campo potencial U para cada nível tal que $z > 0$. Como exposto anteriormente, tal operador atenua consideravelmente as altas frequências. Quando se considera níveis de continuação tais que $z < 0$, temos então a operação de continuação para baixo. Contudo, o operador de continuação para baixo se torna incorreto se há algumas fontes acima do nível de continuação considerado. Este formalismo permite que sejam definidos outros operadores. Por exemplo, podemos definir a diferenciação vertical de ordem n -ésima, a seguir (Blakely, 1995):

$$\widetilde{D}_n(u, v) = (-2\pi\rho)^n \quad (II. 10)$$

É possível combinar as operações elementares (por exemplo, continuações para cima e para baixo, derivada vertical) da maneira tal como elas foram definidas. Por exemplo, nós podemos determinar facilmente a expressão do operador o qual efetua a derivada vertical da continuação para cima de uma anomalia de um campo potencial (Blakely, 1995). Temos então:

$$\widehat{G}(u, v) = \mathcal{F}[\psi_u] \widetilde{D}_n(u, v) \quad (II. 11)$$

APÊNDICE III

DERIVADAS DIRECIONAIS

Considerando uma quantidade escalar $\phi(x, y)$ que varia suavemente em uma dada superfície horizontal de medição, temos que as derivadas horizontais de $\phi(x, y)$ são facilmente estimadas utilizando métodos simples, tais como o de diferenças finitas e através de medições discretas de $\phi(x, y)$. Por exemplo, se os valores $\phi_{ij}, i = 1, 2, \dots; j = 1, 2, \dots$ representam medições discretas de $\phi(x, y)$ para intervalos uniformes de amostragem Δx e Δy , respectivamente, então as derivadas horizontais de $\phi(x, y)$ para pontos genéricos i, j são dadas aproximadamente por (Blakely, 1995):

$$\frac{d\phi(x, y)}{dx} \approx \frac{\phi_{i+1, j} - \phi_{i-1, j}}{2\Delta x} \quad (III.1)$$

e

$$\frac{d\phi(x, y)}{dy} \approx \frac{\phi_{i, j+1} - \phi_{i, j-1}}{2\Delta y} \quad (III.2)$$

As derivadas horizontais são facilmente calculadas no domínio da transformada de Fourier. De acordo com o teorema da diferenciação no domínio da transformada de Fourier, as derivadas horizontais de $\phi(x, y)$ são dadas por (Blakely, 1995):

$$\mathcal{F} \left[\frac{d^n \phi}{dx^n} \right] = (ik_x)^n \mathcal{F}[\phi] \quad (III.3)$$

e

$$\mathcal{F} \left[\frac{d^n \phi}{dy^n} \right] = (ik_y)^n \mathcal{F}[\phi] \quad (III.4)$$

Deste modo, $(ik_x)^n$ e $(ik_y)^n$ são filtros que transformam uma função medida em uma superfície horizontal nas suas derivadas de ordem n com respeito aos eixos cartesianos x e y , respectivamente (Blakely, 1995).

Se ϕ representa um campo potencial, podemos calcular também os gradientes verticais. A derivada vertical de segunda ordem é uma consequência direta da Equação de Laplace, pois temos $\nabla^2 \phi = 0$ e, portanto (Blakely, 1995):

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \quad (III.5)$$

Como o campo potencial ϕ é medido sobre uma superfície horizontal, então a Equação de Laplace pode ser transformada para o domínio de Fourier, como segue (Blakely, 1995):

$$\mathcal{F} \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right] = k_x^2 \mathcal{F}[\phi] + k_y^2 \mathcal{F}[\phi] = |k|^2 \mathcal{F}[\phi] \quad (III.6)$$

, onde k representa o número de onda.

A derivada vertical de segunda ordem tem uma grande importância nas técnicas de interpretação geofísica, pois se trata de um filtro que ajuda a resolver e acentuar fontes rasas. Consideremos dois monopólos observados a partir de um mesmo ponto P , um dos quais está situado a uma profundidade mais rasa denotada por d_1 e o outro a uma profundidade maior denotada por d_2 . O campo potencial de cada monopolo é inversamente proporcional ao quadrado da distância até o ponto P . Deste modo, o campo devido ao monopolo raso aumentará mais rapidamente do que o campo devido ao monopolo mais profundo. Evidentemente, a derivada vertical de segunda ordem terá o mesmo efeito. Similarmente, a derivada vertical de segunda ordem ajuda a delimitar mais precisamente as bordas de fontes causadoras de campos potenciais (Blakely, 1995).

Tais propriedades da derivada vertical de segunda ordem podem ser facilmente verificadas, uma vez que a multiplicação do campo potencial, no domínio da transformada de Fourier, pelo fator $|k|^2$ claramente amplifica os componentes de comprimento de onda menores do campo potencial em detrimento dos componentes de comprimento de onda maior (Blakely, 1995).

Conforme foi explicitado anteriormente, a derivada vertical de segunda ordem é uma consequência direta da Equação de Laplace. As derivadas verticais de ordem n qualquer podem também ser obtidas diretamente a partir dos seus respectivos campos potenciais. Convencionando que o eixo cartesiano z aumenta para baixo e, para $\Delta z > 0$, a derivada vertical de 1ª ordem é dada por (Blakely, 1995):

$$\frac{\partial}{\partial z} \phi(x, y, z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\phi(x, y, z) - \phi(x, y, z - \Delta z)}{\Delta z} \quad (III.7)$$

Fisicamente, a equação (III.7) implica que os dados do campo potencial são continuados para cima em uma distância infinitesimal e que o valor obtido de tal operação é subtraído do campo potencial original (Blakely, 1995).

A transformada de Fourier da derivada vertical de 1ª ordem é dada por (Blakely, 1995):

$$\mathcal{F}\left[\frac{\partial\phi}{\partial z}\right] = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\mathcal{F}[\phi] - \mathcal{F}[\phi]e^{-|k|\Delta z}}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-|k|\Delta z}}{\Delta z} \mathcal{F}[\phi] \\ = |k|\mathcal{F}[\phi] \quad (III.8)$$

De maneira similar, é possível obter uma formulação matemática para as derivadas verticais de n -ésima ordem, sendo que o gradiente vertical de ordem n é igual ao produto da transformada de Fourier do campo potencial pelo fator $|k|^n$, onde k indica o número de onda e n é a ordem da derivada vertical. Mais precisamente, temos (Blakely, 1995):

$$\mathcal{F}\left[\frac{\partial^n \phi}{\partial z^n}\right] = |k|^n \mathcal{F}[\phi] \quad (III.9)$$

A forma simples da equação (III.9) permite o uso de valores não inteiros para a ordem n de derivação, o que fornece as derivadas verticais fracionadas, as quais têm um conteúdo de frequências intermediário, quando comparadas às derivadas verticais de ordem n inteira (Blakely, 1995).

Um método comum de remoção de feições regionais e residuais envolve a continuação para cima dos dados e a posterior subtração deste resultado do campo potencial original. Isto é equivalente à aplicação da equação (III.7) com um limite diferente em Δz , ignorando o fator de escala. Desta forma, um nível de suavização desejado pode ser alcançado. Fica claro que, pelo incremento no limite de Δz na equação (III.7), o nível de continuação para cima também é aumentado e diferentes níveis de separações regionais e residuais podem ser obtidos. No domínio da frequência (domínio da transformada de Fourier), isto tal procedimento equivale ao uso de um valor não inteiro de n na equação (III.9). Na prática, as derivadas verticais fracionadas podem ser utilizadas na separação regional e residual, onde a alteração do grau (ou ordem) de diferenciação remove mais ou menos sinais de baixas frequências, bem como para enfatizar altas frequências em dados de baixa qualidade. Por exemplo, se a derivada vertical de primeira ordem apresenta um sinal muito pobre para a razão dos ruídos contidos nos dados, então uma derivada de ordem 0.5 ou 0.75, por exemplo, pode enfatizar as feições geológicas da região de levantamento geofísico sem reforçar, enfatizar ou introduzir os ruídos anteriormente referidos (Blakely, 1995).

Outra maneira de se escrever a derivadas verticais de ordem n no domínio da transformada de Fourier é exposta a seguir (Blakely, 1995):

$$\mathcal{F}[\nabla\phi] = k'\mathcal{F}[\phi] \quad (III.10)$$

, onde $k = (ik_x, ik_y, |k|)$.

Como o campo de força \mathbf{F} está relacionado ao seu potencial ϕ de acordo com a relação $F = \nabla\phi$, a equação (III.10) expressa tal relação no domínio da transformada de Fourier (Blakely, 1995).

A componente do campo de força \mathbf{F} em uma direção \hat{f} qualquer é simplesmente uma derivada direcional do potencial ϕ , sendo calculada no domínio da transformada de Fourier como segue (Blakely, 1995):

$$\mathcal{F}[\hat{f} \cdot \nabla\phi] = (\hat{f} \cdot k)\mathcal{F}[\phi] \quad (III.11)$$

É sabido que a componente vertical da aceleração gravitacional é dada por:

$$g_z = \frac{\partial}{\partial z} U \quad (III.12)$$

, onde U representa o potencial Newtoniano.

No domínio da transformada de Fourier, temos a seguinte relação para a aceleração gravitacional vertical (Blakely, 1995):

$$\mathcal{F}[g_z] = |k|\mathcal{F}[U] \quad (III.13)$$

Podemos ainda expressar a atração vertical da gravidade em termos dos seus respectivos potenciais no domínio da transformada de Fourier. Neste caso, a componente vertical da aceleração gravitacional é medida em uma superfície horizontal em termos dos seus respectivos potenciais nesta mesma superfície horizontal, como segue (Blakely, 1995):

$$\mathcal{F}[U] = \frac{1}{|k|}\mathcal{F}[g_z]; |k| \neq 0 \quad (III.14)$$

APÊNDICE IV

TEOREMA DA CONVOLUÇÃO

A convolução de duas funções $f(x)$ e $g(x)$ é definida matematicamente como:

$$h(x) = f(x) * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x')g(x - x') dx' \quad (IV.1)$$

Para funções de duas dimensões, temos:

$$h(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x', y')g(x - x', y - y') dx' dy' \quad (IV.2)$$

O teorema da convolução diz que uma convolução de duas funções no domínio do tempo corresponde a um produto das transformadas de Fourier destas funções no domínio do número de onda. Ainda, a convolução e o produto de tais funções constituem um par de transformadas de Fourier contínua (Blakely, 1995). Temos:

$$f(x) * g(x) \leftrightarrow F(k)g(k) \quad (IV.3)$$

Para a transformada de Fourier contínua inversa, temos um resultado análogo:

$$f(x)g(x) \leftrightarrow F(k) * G(k) \quad (IV.4)$$

Significado Físico da Convolução

A integral da Convolução tem um significado físico importante, o qual pode ser visto considerando um circuito elétrico. Suponha que seja possível "inserir" uma corrente em uma parte deste circuito e medir a voltagem resultante em outra parte do mesmo circuito elétrico. Suponha ainda que um pulso de corrente de duração muito curta, ou seja, um impulso, submetido ao circuito no tempo $t = 0$, resulte numa voltagem $g(t)$. A resposta de um circuito elétrico a uma entrada com características de uma função impulso é chamada de resposta impulsiva. Circuitos elétricos podem ser considerados aproximadamente sistemas lineares, sendo lógico que outro impulso submetido ao circuito elétrico t_0 segundos depois produziria uma resposta idêntica, atrasada (ou defasada) por exatamente t_0 segundos; isto é, a voltagem seria denotada por $g(t - t_0)$. Uma série de impulsos nos tempos t_1, t_2, \dots , ponderados por a_1, a_2, \dots resultaria numa saída denotada por $a_1g(t - t_1) + a_2g(t - t_2) + \dots$. Em outras palavras, a resposta a uma série de impulsos é simplesmente uma combinação linear de respostas impulsivas. Como os impulsos são feitos de modo tal que estejam muito próximos entre si, a entrada de um circuito se torna uma corrente variando continuamente. Fica claro que, para este limite, a voltagem de saída será uma combinação contínua de respostas impulsivas.

Como um exemplo geofísico de aplicação da Convolução, considera-se o caso simples de propagação de ondas elásticas. Define-se a saída como o registro sísmico, o sistema como o sismógrafo e a entrada como o movimento do solo. Ou então, a entrada pode ser a fonte sísmica, o sistema corresponder ao meio de propagação (Terra) e ao sismógrafo formando um sistema sequencial (em cascata) e a saída como sendo o sismograma.

A Função Impulso

A função impulso $\delta(t)$ é uma importante ferramenta matemática na análise de Fourier contínua e discreta. O seu uso simplifica muitas operações que seriam, de outra maneira, muito mais difíceis. Normalmente, a definição da função impulso é normalmente desprovida de significado matemático. Para garantir que a função impulso seja bem definida, deve-se interpretar a função impulso não como uma função "normal", mas como um conceito baseado na teoria da distribuição.

Normalmente, a função impulso é definida como:

$$\delta(t - t_0) = 0 ; t \neq t_0 \quad (IV.5)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt = 1 \quad (IV.6)$$

Deste modo, podemos definir a função impulso como tendo magnitude indefinida para um determinado tempo de ocorrência e tendo magnitude zero (nula) nos demais instantes de tempo, com a propriedade adicional de que a área sob a função é unitária. Obviamente, é muito difícil relatar um impulso como um sinal físico. Contudo, pode-se pensar no impulso como uma comprimento de onda de magnitude muito grande e de duração infinitesimalmente pequena, tal que a área do pulso é unitária. Com tal interpretação, constrói-se uma série de funções (isto é, de pulsos), que aumentam progressivamente em amplitude, diminuem em duração e possuem uma área constante e unitária. Logo, podemos definir matematicamente a função impulso como segue:

$$\delta(t) = \lim_{a \rightarrow 0} f(t, a) \quad (IV.7)$$

Propriedades da Função impulso

A função impulso é uma distribuição, a qual atribui a uma função de teste $\phi(t)$ o número $\phi(0)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\phi(t) dt = \phi(0) \quad (IV.8)$$

A função $\delta(t - t_0)$ é definida por:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)\phi(t)dt = \phi(t_0) \quad (IV.9)$$

Esta propriedade é chamada de propriedade de "peneiramento" ("Sifting") e implica que a função impulso assume o valor da função de teste no tempo para o qual a função impulso está definida e é aplicada. O termo "peneiramento" ("Sifting") é devido ao fato de que, se deixarmos t_0 variar continuamente, nós podemos obter cada valor da função de teste para cada instante. Esta é propriedade mais importante da função impulso.

A função impulso em duas dimensões, denotada por $\delta(x, y)$, é uma distribuição que atribui à função de teste em duas dimensões, denotada por $\phi(x, y)$, o número $\phi(0,0)$:

$$\iint_{-\infty}^{\infty} \delta(x, y)\phi(x, y)dxdy = \phi(0,0) \quad (IV.10)$$

A partir da definição da função impulso em duas dimensões, a propriedade fundamental de "peneiramento" ("Sifting") da função impulso em duas dimensões, a qual é a chave fundamental para o desenvolvimento e o entendimento do teorema da amostragem em duas dimensões, pode ser derivada como segue:

$$\iint_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0, y - y_0)h(x, y)dxdy = h(x_0, y_0) \quad (IV.11)$$

APÊNDICE V

TEOREMA DE PARSEVAL

A energia total de uma função real $f(x)$ pode ser encontrada tanto pela integração de $f^2(x)$ sobre todo o espaço ou então pela integração do espectro de energia total de $f(x)$ sobre todos os números de onda k . Esta relação é expressa pela Fórmula de Parseval. Se $f(x)$ é uma função real e possui uma transformada de Fourier denotada por $f(x) \leftrightarrow F(k)$, então (Blakely, 1995):

$$2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |F(k)|^2 dk \quad (V.1)$$